K-TEORÍA
PRIMER CUATRIMESTRE, 2019
Práctica 3

En esta práctica, A es un anillo, R es un anillo con unidad, e $\iota : A \to M_nA$ e $\mathrm{inc} : M_nA \to M_{n+1}A$ denotan los morfismos $\iota(a) = ae_{11}$, $\mathrm{inc}(a) = a$. Un álgebra sobre un anillo conmutativo unitario k es un anillo A con una estructura de k-módulo tal que si $a, b \in A$ y $\lambda \in k$, entonces

$$\lambda \cdot (ab) = (\lambda \cdot a)b = a(\lambda \cdot b).$$

Algunos de los ejercicios (indicados con un *) utilizan resultados básicos de la teoría de operadores en espacios de Hilbert y están pensados para quienes hayan cursado una materia (Análisis Funcional, e.g.) en la que se hayan dado. El ejercicio 6) está destinado a quienes no estén familiarizados con el producto tensorial.

(1) Sean $F : \underline{\mathrm{Rings}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ un funtor y A un anillo. Probar:
  (a) Son equivalentes:
    - Para todo $n, p \in \mathbb{N}$, F es M_p-estable en M_nA.
    - Para todo $n \in \mathbb{N}$, F es M_2-estable en M_nA.

    En particular, un funtor M_2-estable es M_n-estable, para todo n.
  (b) Si F es M_∞-estable tanto en A como en M_nA, entonces F es M_n-estable en A. En particular, si F es M_∞-estable, entonces es M_n-estable para todo n.

(2) (a) Sea L un R-módulo libre, finitamente generado de rango n. Eligiendo una base $\mathfrak{B}$ de L se obtiene un isomorfismo $\phi = \phi_{\mathfrak{B}} : M_nR \to \mathrm{End}_R L$. Probar que $K_j(\phi)$ es independiente de la elección de $\mathfrak{B}$ ($j = 0, 1$).
  (b) Supongamos que R es un cuerpo. Si $e \in \mathrm{End}_R L$ es idempotente, entonces $\iota_e : R \to \mathrm{End}_R L$, $x \mapsto xe$ es un morfismo de anillos. Probar que si $e \in \mathrm{End}_R L$ es de rango 1, entonces $K_j(\iota_e) = K_j(\phi\iota)$. En particular, $K_j(\iota_e)$ es independiente de la elección del idempotente e de rango 1.
  (c) * Sean H un espacio de Hilbert complejo separable (e.g. $H = \ell^2(\mathbb{N})$) y $\mathcal{F}$ el anillo de operadores $T : H \to H$ con $\dim \mathrm{im}\, T < \infty$. Si $V \subset W \subset H$ son subspacios de dimensión finita y $U = V^\perp \cap W$ entonces la descomposición $W = V \oplus U$ induce una inclusión $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$. Probar que
$$\mathcal{F} = \bigcup_{\dim V < \infty} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V).$$
  (d) * Probar que si $e \in \mathcal{F}$ es cualquier idempotente autoadjunto y de rango 1, entonces la inclusión $\mathbb{C} \to \mathcal{F}$, $x \mapsto xe$, induce un isomorfismo $K_j(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} K_j(\mathcal{F})$. Probar más aún que este isomorfismo es independiente de la elección de e.

(3) * Sean H como en el ejercicio anterior y sea $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ el anillo de operadores acotados $H \to H$; i.e.
$$\mathcal{B} = \{T : H \to H : \text{ lineal tal que } ||T|| := \sup_{||h||=1} ||T(h)|| < \infty\}$$
  (a) $\mathcal{F} \lhd \mathcal{B}$.
  (b) Sea $\mathcal{K} \lhd \mathcal{B}$ la clausura de $\mathcal{F}$; los elementos de $\mathcal{K}$ son los operadores *compactos*. Un resultado clásico de Calkin establece que si $I \lhd \mathcal{B}$ es un ideal propio, entonces $\mathcal{F} \subset I \subset \mathcal{K}$. Sea $R_I = \mathbb{C} \oplus I/\mathcal{F}$; probar que R_I es un anillo local (sug. usar el teorema de Riesz-Schauder).
  (c) Probar que hay un diagrama con filas exactas y columnas exactas escindidas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & I \arrow[r] \arrow[d] & I/\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathbb{C} \oplus I \arrow[r] \arrow[d] & R_I \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathbb{C} \arrow[r, equal] & \mathbb{C} &
\end{tikzcd}$$

(d) Probar que $K_0(I/\mathcal{F}) = 0$. Deducir que $K_0(\mathcal{F}) \to K_0(I)$ es suryectivo y que $K_1(I/\mathcal{F}) \to K_0\mathcal{F}$ se factoriza a través de $K_1(R_I) \to K_0\mathcal{F}$.
(e) $K_1(\mathbb{C} \oplus I) \to K_1(R_I)$ es suryectivo.
(f) $K_0(\mathcal{F}) \to K_0(I)$ es un isomorfismo.
(g) Sea $\mathcal{Q} = \mathcal{B}/\mathcal{F}$ y sea $T \in \mathcal{B}$ tal que su imagen $\bar{T} \in \mathrm{GL}_1(\mathcal{Q})$. Probar que T es un operador de Fredholm.
(h) Probar que si T es como en el ítem anterior y $\theta : K_0(\mathcal{F}) \cong K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$ es el isomorfismo del ejercicio anterior, entonces la imagen por $\theta\partial$ de la clase de $\bar{T}$ en $K_1(\mathcal{Q})$ coincide con el índice $\mathrm{ind}(T) = \dim\ker T - \dim\mathrm{im}\, T$:

$$\theta\partial[\bar{T}] = \mathrm{ind}(T).$$

(i) ¿Qué pasa si reemplazamos $\mathcal{F}$ por un ideal propio cualquiera I en los dos ítems anteriores?

(4) Dados $a, b \in A$, sea $[a, b] = ab - ba$. Sea

$$[A, A] = \{\sum_{i=1}^{n} [a_i, b_i] : a_i, b_i \in A \quad (1 \le i \le n)\}$$

Sea

$$HH_0(A) := A/[A, A]$$

Probar:
(a) La aplicación $Tr : M_\infty A \to HH_0(A)$, $Tr(a) = [\sum_i a_{i,i}]$ es una suryección con $\ker T \supset [M_\infty A, M_\infty A]$.
(b) Si $A^2 = A$ entonces $\ker T = [M_\infty A, M_\infty A]$ y HH_0 es M_∞-estable en A.
(c) HH_0 conmuta con colímites filtrantes.
(d) HH_0 es un funtor aditivo.

(5) Sea L_2 el anillo del ejercicio 16 de la práctica 1. Probar:
(a) $HH_0(L_2) \neq 0$.
(b) L_2 no es un anillo con sumas directas infinitas.

(6) Sean k un anillo conmutativo unital y sean M, N y P módulos sobre k. Sea

$$M \otimes_k N = \mathbb{Z}[M \times N]/\langle(\lambda m, n) - (m, \lambda n) : m \in M, n \in N\rangle$$

Sea $m \otimes n$ la clase de (m, n) en $M \otimes_k N$. Probar:
(a) Hay una única estructura de k-módulo en $M \otimes_k N$ tal que $\lambda \cdot (m \otimes n) = (\lambda \cdot m) \otimes n$.
(b) La aplicación $b : M \times N \to M \otimes_k N$, $(m, n) \mapsto m \otimes n$ es k-bilineal.
(c) Si $f : M \times N \to P$ es bilineal, entonces existe un único morfismo de k-módulos $\bar{f} : M \otimes_k N \to P$ tal que $\bar{f}(m \otimes n) = f(m, n)$.
(d) Hay isomorfismos canónicos $(M \otimes_k N) \otimes_k P \cong M \otimes_k (N \otimes_k P)$ y $M \otimes_k N \cong N \otimes_k M$.
(e) $M \otimes_k k \cong M$.
(f) El funtor $M\otimes_k : k - \mathrm{Mod} \to k - \mathrm{Mod}$ conmuta con colímites filtrantes y sumas directas arbitrarias.
(g) Si A y B son k-álgebras entonces $A \otimes_k B$ tiene una única estructura de k-álgebra tal que

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 \cdot a_2) \otimes_k (b_1 \cdot b_2).$$

(h) Si A es una k-álgebra y $1 \le n \le \infty$ entonces $M_n A \cong M_n k \otimes_k A$.

(7) Sean $\Gamma = \Gamma\mathbb{Z}$ y A un anillo. Probar:
(a) Existe un morfismo de anillos canónico $f : \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} A \to \Gamma A$ que envía $\gamma \otimes a$ en γa (recordar que $\Gamma A \lhd \Gamma\tilde{A} \supset \Gamma$).
(b) Sean $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las proyecciones. La función característica $\chi_S \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ de un subconjunto $S \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ está en Γ si y sólo si

$$S \in \Theta = \{T \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (\exists N)(\forall n \in \mathbb{N}), \#(\pi_i^{-1}(n) \cap T) \le N, i = 1, 2\}.$$

(c) Si $a \in \Gamma A$, entonces

$$a = f(\sum_{\lambda \in \mathrm{im}\, a} \lambda \otimes \chi_{\{(i,j): a_{i,j} = \lambda\}}).$$

En particular, f es suryectiva.

(d) Cada elemento $x \in \Gamma \otimes A$ puede escribirse de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes \chi_{S_i}$$

con $S_1, \dots, S_n \in \Theta$, $S_i \neq S_j$ si $i \neq j$.

(e) Sea $S = \cup_{i=1}^{n} S_i$. Si $F \subset \{1, \dots, n\}$, sea

$$S_F = (\bigcap_{i \in F} S_i) \cap (\bigcap_{j \notin F} (S \setminus S_j))$$

Tenemos

$$S_F \in \Gamma, \quad S_F \cap S_{F'} = \emptyset \text{ si } F \neq F',$$
$$\chi_{S_i} = \sum_{i \in F} \chi_{S_F} \quad \text{y} \quad x = \sum_{F} (\sum_{i \in F} a_i) \otimes \chi_{S_F}.$$

(f) f es un isomorfismo.

(g) f induce un isomorfismo $\Sigma \otimes A \cong \Sigma A$.

(8) Sean R un anillo unital y $M_\infty R \triangleleft E$ un anillo que contiene a $M_\infty R$ como ideal bilátero. Probar que existe un único morfismo de anillos $\phi : \Gamma^\ell(R) \to E$ tal que $\phi(x) = x$ para todo $x \in M_\infty R$.

(9) * Un resultado clásico de Karoubi establece que $K_{-1}(\mathcal{K}) = 0$. Asumiendo ese resultado, probar que $K_{-1}(I) = 0$ para todo ideal propio $I \triangleleft \mathcal{B}$.

(10) Sean k un cuerpo y $R = k[t^2, t^3] \subset k[t]$. Probar que $K_{-n}R = 0$ para todo $n \geq 1$.

(11) Sean k un cuerpo y $R = \{(f, g) \in k[t] | f(0) = g(0) \text{ y } f(1) = g(1)\}$. Calcular $K_n(R)$ para todo $n \leq 0$.