

K-TEORÍA
PRIMER CUATRIMESTRE, 2012
Práctica 1

- (1) Sea M un monoide abeliano. Se considera la siguiente relación de equivalencia en el monoide $M \oplus M$:

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \iff (\exists x \in M) \quad m_1 + n_2 + x = m_2 + n_1 + x.$$

Probar que el monoide cociente M/\sim es un grupo abeliano, que $\iota : M \rightarrow M/\sim$ es morfismo de monoides, y que el par $(M/\sim, \iota)$ es un grupo de Grothendieck de M .

- (2) Si M y N son monoides abelianos entonces el morfismo canónico

$$(M \oplus N)^+ \rightarrow M^+ \oplus N^+$$

es un isomorfismo.

- (3) Sea R un anillo con unidad. Probar que $V(M_\infty R) \cong V(R)$.

- (4) Sean k un cuerpo y

$$M_n k \supset T_n k = \{a : a_{i,j} = 0 \text{ si } i > j\}$$

la k -álgebra de matrices triangulares superiores. Calcular $K_0(T_n k)$.

- (5) Un anillo unital R se dice *local* si posee un único ideal a izquierda maximal. Sea R un anillo local y \mathfrak{m} su único ideal a izquierda maximal. Probar

- (a) El ideal \mathfrak{m} es bilátero y es el único ideal a derecha maximal de R .
- (b) El anillo $D = R/\mathfrak{m}$ es de división.
- (c) Una matriz $g \in M_n R$ es inversible si y sólo si su imagen en D lo es.
- (d) La aplicación $V(R) \rightarrow V(D)$ es un isomorfismo de monoides.

- (6) Sean R un anillo unital y $n \geq 1$. Se consideran las inclusiones

$$\begin{aligned} \iota, \Delta : R &\rightarrow M_n R \\ \iota(a) &= a e_{1,1} \\ \Delta(a) &= \sum_{i=1}^n a e_{i,i} \end{aligned}$$

Probar:

- (a) $K_0(\iota)$ es un isomorfismo.
- (b) $K_0(\iota)^{-1} K_0(\Delta)$ es el morfismo de multiplicación por n , i.e. manda $x \mapsto n \cdot x$.

- (7) Sea A un anillo tal que $A^n = 0$. Calcular $K_0(A)$.

- (8) Sea $(M_i)_{i \in I}$ un sistema dirigido de monoides abelianos y sea M su colímite en **Sets**. Probar que M tiene una estructura natural de monoide abeliano de modo que las aplicaciones canónicas $M_i \rightarrow M$ son morfismos de monoides y que M junto con tales aplicaciones es un colímite del sistema en la categoría de monoides abelianos.

- (9) Sean I un conjunto ordenado dirigido, (M'_i, σ') , (M_i, σ) y (M''_i, σ'') sistemas de grupos abelianos dirigidos por I y sean M' , M y M'' sus colímites. Sean $f_i : M'_i \rightarrow M_i$, $g_i : M_i \rightarrow M''_i$ morfismos compatibles con los morfismos de transición σ , σ' y σ'' , y $f : M' \rightarrow M$, $g : M \rightarrow M''$ los morfismos inducidos. Probar que si para cada $i \in I$ la sucesión

$$0 \rightarrow M'_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M''_i \rightarrow 0$$

es exacta, entonces la sucesión

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

también es exacta.

- (10) Sean M un grupo abeliano y $n \in \mathbb{Z}$. Sea

$$M[1/n] := \operatorname{colim}(M \xrightarrow{n} M \xrightarrow{n} M \xrightarrow{n} \dots)$$

Probar

- (a) El grupo $M[1/n]$ es *unívocamente divisible por n* , i.e., el morfismo $M[1/n] \rightarrow M[1/n]$, $x \mapsto n \cdot x$ es un isomorfismo.
 (b) Si N es un grupo abeliano unívocamente divisible por n y $\alpha : M \rightarrow N$ es un morfismo de grupos, entonces existe un único morfismo $\hat{\alpha} : M[1/n] \rightarrow N$ tal que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha} & N \\ & \searrow & \uparrow \hat{\alpha} \\ & & M[1/n] \end{array}$$

- (11) Sea R un anillo con unidad. Sea

$$M_{n^\infty} R := \operatorname{colim}(M_n R \xrightarrow{\Delta} M_{n^2} R \xrightarrow{\Delta} M_{n^3} R \xrightarrow{\Delta} \dots)$$

Probar que $K_0(M_{n^\infty} R) = K_0(R)[1/n]$.

- (12) Sean k un cuerpo y $m, n \in \mathbb{N}$. Probar:

- (a) Existe un morfismo de k -álgebras unital $M_m k \rightarrow M_n k \iff m \mid n$.
 (b) Si $m \mid n$ y $\alpha : M_m k \rightarrow M_n k$ es un morfismo unital, entonces existe $g \in \operatorname{GL}_n(k)$ tal que para todo $x \in M_m k$ se tiene $\alpha(x) = g \Delta(x) g^{-1}$.

Sugerencia general para todo el ejercicio: usar el teorema de Wedderburn.

- (13) Sea (d_i) una sucesión de números naturales ≥ 2 . Para cada $i \geq 1$ sea $n_i = d_1 \cdots d_i$, y sea $n = (n_i)$. Para cada primo p la *valuación p -ésima* de n es

$$\mathbb{N} \cup \{0, \infty\} \ni \nu_p(n) = \sup\{e : (\exists i) p^e \mid n_i\}$$

Sean k un cuerpo, $f_i : M_{n_i} k \rightarrow M_{n_{i+1}} k$ un morfismo unital de k -álgebras ($i \geq 1$), y $R = \operatorname{colim}_i M_{n_i} k$ el correspondiente colímite. Probar

$$K_0(R) \cong \{a/b \in \mathbb{Q} : \nu_p(b) \leq \nu_p(n) \text{ } p \text{ primo}\}$$

- (14) Sea A un anillo tal que para todo subconjunto $F \subset A$, existe $n \geq 1$ tal que el conjunto $F^n := \{x_1 \cdots x_n : x_i \in F\}$ es cero. Probar que $K_0(A) = 0$.

- (15) Sea $f : R \rightarrow S$ un morfismo unital de anillos unitales. Si N es un S módulo a derecha llamamos $f^\# N$ al grupo abeliano N equipado con la siguiente estructura de R -módulo:

$$n \cdot r := n f(r)$$

Sea M un R módulo a derecha. Una *extensión de escalares de M a través de f* consiste de un S -módulo E y un morfismo de R -módulos $M \rightarrow f^\# E$ tal que si N es otro S -módulo y $\alpha : M \rightarrow f^\# N$ es un morfismo de R -módulos, entonces existe un único morfismo de S -módulos $\hat{\alpha} : E \rightarrow N$ de modo que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha} & N \\ & \searrow & \uparrow \hat{\alpha} \\ & & E \end{array}$$

- (a) Consideremos el grupo abeliano

$$M \otimes_R S = \mathbb{Z}[M \times S] / \langle (mr, s) - (m, f(r)s) \rangle$$

Llamemos $m \otimes s$ a la clase de (m, s) en $M \otimes_R S$. Probar que $M \otimes_R S$ equipado con la estructura de S -módulo inducida por $(m \otimes s)s' = m \otimes ss'$ y el morfismo $M \rightarrow f^\#(M \otimes_R S)$ $m \mapsto m \otimes 1$ es una extensión de escalares de M y que toda otra extensión de escalares es canónicamente isomorfa a esta.

- (b) Probar que $R \otimes_R S = S$.

- (c) Probar que $\otimes_R S$ preserva sumas directas: $(\bigoplus_i M_i) \otimes_R S = \bigoplus_i (M_i \otimes_R S)$.

- (d) Probar que si P es proyectivo entonces $P \otimes_R S$ es proyectivo.
- (e) Probar que si $e \in \text{Idem}_n R$ entonces $(eR^n) \otimes_R S \cong f(e)S^n$. Deducir que la identificación entre V y el monoide de clases de isomorfismo de módulos proyectivos finitamente generados identifica $e \mapsto f(e)$ con $P \mapsto P \otimes_R S$.
- (16) Sean $n \geq 2$, $P_n = \mathbb{Z}\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ el anillo de polinomios no conmutativo, y L_n el cociente de P_n por el ideal bilátero generado por los elementos $\delta_{ij} - y_i x_j$ ($1 \leq i, j \leq n$) y $1 - \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- (a) Sea $e_i = x_i y_i$. Probar que e_i es idempotente y que $e_i L_n \cong L_n$.
- (b) $(n-1) \cdot [L_n] = 0$ en $K_0(L_n)$.