Algebra Lineal

15 de abril de 2021

Transformaciones lineales

Definición

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una función $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que cumple

1. $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$ para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$
2. $T(\lambda \mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$

Nota

Si $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal, entonces $T(\vec{0}) = T(0\vec{0}) = 0T(\vec{0}) = \vec{0}$

Ejemplos

Ejemplo

Sea $T(x,y) = (2x+3y, 5x-y)$. Si $\mathbf{v} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{w} = (x_2, y_2)$, entonces

$$\begin{aligned} T(x_1+x_2, y_1+y_2) &= (2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2), 5(x_1+x_2)-(y_1+y_2)) \\ &= (2x_1+3y_1+2x_2+3y_2, 5x_1-y_2+5x_2-y_2) \\ &= (2x_1+3y_1, 5x_1-y_2)+(2x_2+3y_2, 5x_1-y_2) \\ &= T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2) \end{aligned}$$

y

$$T(\lambda x, \lambda y) = (2\lambda x + 3\lambda y, 5\lambda x - \lambda y) = \lambda(2x+3y, 5x-y) = \lambda T(x,y)$$

Ejemplos II

Ejemplo

Tomemos $T(x,y,z) = (2x+3y+2, 4x-y-z+1, 6x)$, entonces

$$T(0,0,0) = (2,1,0) \neq (0,0,0)$$

Cuidado

No es una transformación lineal. En una transformación lineal no pueden aparecer constantes sueltas (tipo $+2$ etc)

Ejemplos III

Ejemplo

Tomemos $T(x,y) = (x^2, y^2)$, entonces

$$\begin{aligned} T(x_1+x_2, y_1+y_2) &= ((x_1+x_2)^2, (y_1+y_2)^2) \\ &= (x_1^2+x_2^2+2x_1x_2, y_1^2+y_2^2+2y_1y_2) \\ &= T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)+(2x_1x_2, 2y_1y_2) \end{aligned}$$

Cuidado

No es una transformación lineal. NO pueden aparecer las componentes del vector elevados a una potencia distinta de 1. Tampoco pueden aparecer productos de componentes.

Matrices y transformaciones lineales

Idea

Un modo de obtener transformaciones lineales es tomar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y considerar la función $T_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Aquí los vectores de $\mathbb{R}^m$ los miramos como vectores columna. Las propiedades

$$A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = A\mathbf{v}_1 + A\mathbf{v}_2$$

y

$$A\lambda\mathbf{v} = \lambda A\mathbf{v}$$

garantizan que T_A es una transformación lineal.

Cuidado

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, entonces $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Ejemplo

Ejemplo 1

Tomemos por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$T_A(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 5x - y \end{pmatrix}$$

Obtenemos la transformación del primer ejemplo. Vamos a llamar T_A la transformación lineal asociada a la matriz A.

Pregunta

¿Se pueden obtener todas las transformaciones lineales a partir de matrices?

Respuesta

Caso $n = 2$

Supongamos que tenemos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(x(1, 0) + y(0, 1)) = T(x(1, 0)) + T(y(0, 1)) \\ &= xT(1, 0) + yT(0, 1) = x(a, c) + y(b, d) \\ &= (xa + yb, xc + yd) \end{aligned}$$

Si tomamos ahora

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ entonces } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

Es decir $T = T_A$

Situación general

Matriz asociada a una transformación lineal

Supongamos que tenemos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Llamemos $\mathbf{e}_i$ al vector de $\mathbb{R}^m$ que tiene un 1 en el lugar i y 0 en todos los otros lugares. Los vectores $\mathbf{e}_i$ forman una base de $\mathbb{R}^m$. Entonces si $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m) = v_1\mathbf{e}_1 + \dots + v_m\mathbf{e}_m$, vale que

$$T(\mathbf{v}) = v_1 T(\mathbf{e}_1) + \dots + v_m T(\mathbf{e}_n)$$

Si llamamos $T(\mathbf{e}_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ podemos formar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Entonces $T = T_A$. La matriz A se llama la matriz de T en la base canónica.

Notas sobre el rango de una matriz

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. El espacio fila $F(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ de A es el espacio generado por las filas de A pensadas como vectores.

Ejemplo

Supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces $F(A) =< (1,2), (3,4) >$.

Proposicion

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y sea A' la matriz triangular superior que se obtiene luego de hacer eliminación Gaussiana. Entonces $F(A) = F(A')$

Notas sobre el rango de una matriz II

Proposicion

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ una matriz triangular superior. Si $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k$ son las filas no nulas de A, entonces $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k$ son una base de $F(A)$. Por lo tanto $\dim(F(A)) = k$.

Nota

Recordemos que habíamos definido el rango de una matriz $\text{rang}(A)$ como la cantidad de filas no nulas que teníamos después de hacer eliminación Gaussiana.

Proposicion

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, entonces $\dim(F(A)) = \text{rang}(A)$.

Espacio columna de una matriz

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. El espacio columna $C(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ de A es el espacio generado por las columnas de A pensadas como vectores.

Nota

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, entonces $F(A) = C(A^t)$.

Teorema

Vale que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t)$ es decir $\dim(F(A)) = \dim(C(A))$.

Núcleo de una transformación lineal

Definición

El núcleo de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$\mathrm{Nu}(T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \mid T(\mathbf{v}) = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Proposicion

El núcleo $\mathrm{Nu}(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$

Demostración

Como $T(\vec{0}) = \vec{0}$, entonces $\vec{0} \in \mathrm{Nu}(T)$. Si $\mathbf{v} \in \mathrm{Nu}(T)$ y $\mathbf{w} \in \mathrm{Nu}(T)$, entonces $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ por lo tanto $\mathbf{v} + \mathbf{w}\lambda\,\mathrm{Nu}(T)$. Finalmente si $\mathbf{v} \in \mathrm{Nu}(T)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v}) = \lambda\vec{0}$. Por lo tanto $\lambda\mathbf{v} \in \mathrm{Nu}(T)$. $\square$

Notas

Como calcular el núcleo

Tomemos $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + 2y - 4z, 2x + 7y + 3z)$. Calcular el núcleo de T es resolver el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 0 \\ 2x + 7y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Se resuelve por eliminación Gaussiana o reemplazando.

Nota (Conclusión)

Todo sistema lineal homogéneo corresponde al núcleo de una transformación lineal. Por lo tanto un sistema homogéneo tiene 1 solución ($\mathrm{Nu}(T) = \{\vec{0}\}$) o infinitas soluciones.

Cual es la dimensión del núcleo

Idea

Supongamos que queremos calcular el núcleo de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x + 4y - 2z, -2x + 2y - 4z)$$

Tenemos que resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ 4x + 4y - 2z &= 0 \\ -2x + 2y - 4z &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Cual es la dimensión del núcleo II

Continuación

La matriz asociada al sistema (1) es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Haciendo eliminación Gaussiana en A obtenemos

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con esto sabemos que $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Cual es la dimensión del núcleo III

Continuación

El sistema asociado a A' es

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ 8y - 10z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Las soluciones de este sistema tienen la forma

$$(3/4z, 5/4z, z) = z(3/4, 5/4, 1)$$

Por lo tanto $\mathrm{Nu}(T) =< (3/4, 5/4, 1) >$, entonces $\dim(\mathrm{Nu}(T)) = 1 = 3 - \mathrm{rang}(A)$

Cual es la dimensión del núcleo IV

Teorema (Rango-Nulidad primera forma)

Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y sea $A_T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ la matriz asociada. Entonces

$$m = \operatorname{rang}(A_T) + \dim(\operatorname{Nu}(T))$$

Imagen de una transformación lineal

Definición

La imagen de una transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es el conjunto

$$\mathrm{Im}\,(T) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, T(\mathbf{v}) = \mathbf{u}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Proposicion

La imagen $\mathrm{Im}\,(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Demostración

Como $\vec{0} = T(\vec{0})$, entonces $\vec{0} \in \mathrm{Im}\,(T)$. Si $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}\,(T)$, existe $\mathbf{v}_1$ tal que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}$ y si $\mathbf{w} \in \mathrm{Im}\,(T)$ existe $\mathbf{w}_1$ tal que $T(\mathbf{w}_1) = \mathbf{w}$, por lo tanto $\mathbf{v} + \mathbf{w} = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{w}_1) = T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1) \in \mathrm{Im}\,(T)$. Finalmente si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}\,(T)$, existe $\mathbf{v}_1$ tal que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}$. Por lo tanto $\lambda\mathbf{v} = T(\lambda\mathbf{v}_1) \in \mathrm{Im}\,(T)$

Como calcular la imagen de una transformación lineal

Idea

Ahora queremos calcular la imagen de $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 4x + 4y - 2z, -2x + 2y - 4z)$$

Un vector $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ está en la imagen de T si y solo si existe $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Esto quiere decir que

$$\begin{aligned}(w_1, w_2, w_3) &= T(v_1, v_2, v_3)\\ &= (v_1 - v_2 + 2v_3, 4v_1 + 4v_2 - 2v_3, -2v_1 + 2v_2 - 4v_3)\\ &= v_1(1, 4, -2) + v_2(-1, 4, 2) + v_3(2, -2, -4)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\operatorname{Im}(T) =< (1, 4, -2), (-1, 4, 2), (2, -2, -4) >$.

Caracterización de la imagen de una transformación lineal

Continuación

La matriz asociada a T es

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto observamos que $\operatorname{Im}(T) = C(A_T)$. Esto vale en general.

Proposicion

Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Sea $A_T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ la matriz asociada. Entonces $\operatorname{Im}(T) = C(A_T)$. Por lo tanto $\dim(\operatorname{Im}(T)) = \operatorname{rang}(A_T)$.

Teorema (Rango-Nulidad segunda forma)

Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces

$$m = \dim(\mathrm{Im}\,(T)) + \dim(\mathrm{Nu}(T))$$

Matrices ortogonales

Idea

Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2), \quad \mathbf{w} = (w_1, w_2)$$

Vamos a calcular $(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ y $\mathbf{v} \cdot (A^t\mathbf{w})$.

$$\begin{aligned} (A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= (av_1 + bv_2, cv_1 + dv_2) \cdot (w_1, w_2) \\ &= av_1w_1 + bv_2w_1 + cv_1w_2 + dv_2w_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot (A^t\mathbf{w}) &= (v_1, v_2) \cdot (aw_1 + cw_2, bw_1 + dw_2) \\ &= av_1w_1 + cv_1w_2 + bv_2w_1 + dv_2w_2 \end{aligned}$$

Vemos que $(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (A^t\mathbf{w})$

Matrices Ortogonales II

Proposicion

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ vale que

$$(A\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (A^t\mathbf{w})$$

Definición

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal si $A^t = A^{-1}$

Propiedades de las matrices ortogonales

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal, entonces

1. $\det(A) = \pm 1$
2. $(A\mathbf{v}) \cdot (A\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$
3. $\|A\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| \ \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$
4. $\angle A\mathbf{v}, A\mathbf{w} = \angle \mathbf{v}, \mathbf{w} \ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$

Demostraciones

Parte 1

Sea id la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Como $AA^t = id$, entonces $1 = \det(id) = \det(AA^t) = \det(A)\det(A^t) = \det(A)^2$.

Parte 2

Vale que $(A\mathbf{v}) \cdot (A\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (A^t(A\mathbf{w})) = \mathbf{v} \cdot ((A^tA)\mathbf{w})) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

Parte 3 y 4

Salen directos de la parte 2.

Ejemplos de matrices ortogonales

Rotación de ángulo θ

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Reflexión en el eje x

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Permutación de coordenadas

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comentarios

Proposicion

Si A y B son dos matrices ortogonales en $\mathbb{R}^{n\times n}$, entonces AB es una matriz ortogonal.

Demostración

Vale que $(AB)^t = B^tA^t$, entonces $(AB)^t = B^tA^t = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$

Matrices ortogonales en $\mathbb{R}^{2\times 2}$

Si A es una matriz ortogonal de 2×2 hay dos posibilidades:

Caso 1 Si $\det(A) = 1$, entonces A es una matriz de rotación.

Caso 2 Si $\det(A) = -1$ entonces A es una reflexión en una recta de ángulo $\theta/2$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$