Algebra Lineal

14 de abril de 2021

Subespacios vectoriales

Definición

Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\vec{0} \in S$
2. Si $\mathbf{v} \in S$ y $\mathbf{w} \in S$, entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in S$
3. Si $\mathbf{v} \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda\mathbf{v} \in S$

Ejemplo

Tomamos $S = \mathbb{R}^n$, entonces S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

Tomemos $S = \{\vec{0}\}$, entonces S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

Lineas por el $\vec{0}$

Sea $\mathbf{v} \neq \vec{0}$ un vector en $\mathbb{R}^2$ y sea $\mathbb{L}$ la linea recta formada por todos los múltiplos de $\mathbf{v}$. es decir

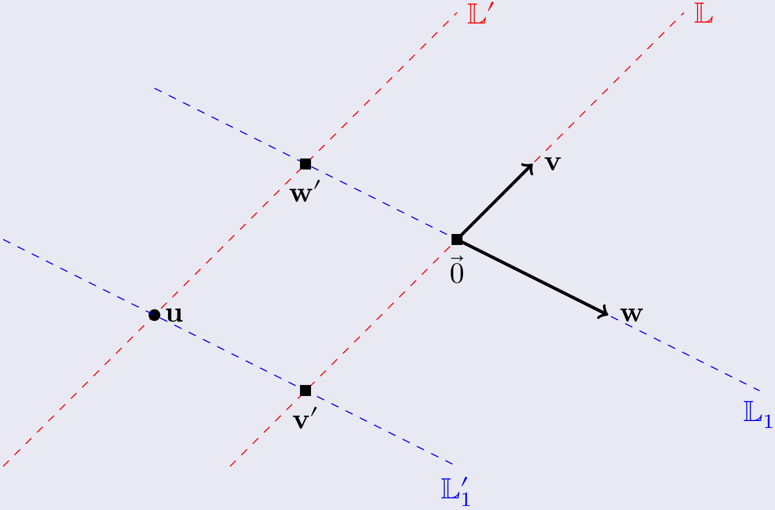
$$\mathbb{L} = \{\lambda \mathbf{v} | \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Veamos que es un subespacio.

1. $\vec{0} = 0\mathbf{v} \in \mathbb{L}$
2. Si $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{L}$ y $\mathbf{w} \in \mathbb{L}$, entonces existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}$ tales que $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}$ y $\mathbf{w} = \mu \mathbf{v}$. Por lo tanto
$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{v} = (\lambda + \mu)\mathbf{v} \in \mathbb{L}$$
3. Si $\mathbf{w} \in \mathbb{L}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{w} = \mu \mathbf{v}$, por lo tanto $\lambda \mathbf{w} = \lambda(\mu \mathbf{v}) = (\lambda \mu)\mathbf{v} \in \mathbb{L}$.

Tercer caso

Idea geométrica



Continuación

Tercer caso

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que no es $\{\vec{0}\}$ ni es una linea.

1. Como $S \neq \{\vec{0}\}$ tiene que existir $\mathbf{v} \in S$ tal que $\mathbf{v} \neq \vec{0}$.

Continuación

Tercer caso

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que no es $\{\vec{0}\}$ ni es una linea.

1. Como $S \neq \{\vec{0}\}$ tiene que existir $\mathbf{v} \in S$ tal que $\mathbf{v} \neq \vec{0}$.
2. Como S no es una linea, debe existir un vector no nulo $\mathbf{w} \in S$ que sea linealmente independiente de $\mathbf{v}$.

Continuación

Tercer caso

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que no es $\{\vec{0}\}$ ni es una linea.

1. Como $S \neq \{\vec{0}\}$ tiene que existir $\mathbf{v} \in S$ tal que $\mathbf{v} \neq \vec{0}$.
2. Como S no es una linea, debe existir un vector no nulo $\mathbf{w} \in S$ que sea linealmente independiente de $\mathbf{v}$.
3. Sean $\mathbb{L}$ la linea de múltiplos de $\mathbf{v}$ y $\mathbb{L}_1$ la linea de múltiplos de $\mathbf{w}$.

Continuación

Tercer caso

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que no es $\{\vec{0}\}$ ni es una linea.

1. Como $S \neq \{\vec{0}\}$ tiene que existir $\mathbf{v} \in S$ tal que $\mathbf{v} \neq \vec{0}$.
2. Como S no es una linea, debe existir un vector no nulo $\mathbf{w} \in S$ que sea linealmente independiente de $\mathbf{v}$.
3. Sean $\mathbb{L}$ la linea de múltiplos de $\mathbf{v}$ y $\mathbb{L}_1$ la linea de múltiplos de $\mathbf{w}$.
4. Supongamos que $\mathbf{u}$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{u} \in \mathbb{L}$, entonces $\mathbf{u} \in S$. Si $\mathbf{u} \notin \mathbb{L}$

Continuación

Tercer caso

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que no es $\{\vec{0}\}$ ni es una linea.

1. Como $S \neq \{\vec{0}\}$ tiene que existir $\mathbf{v} \in S$ tal que $\mathbf{v} \neq \vec{0}$.
2. Como S no es una linea, debe existir un vector no nulo $\mathbf{w} \in S$ que sea linealmente independiente de $\mathbf{v}$.
3. Sean $\mathbb{L}$ la linea de múltiplos de $\mathbf{v}$ y $\mathbb{L}_1$ la linea de múltiplos de $\mathbf{w}$.
4. Supongamos que $\mathbf{u}$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{u} \in \mathbb{L}$, entonces $\mathbf{u} \in S$. Si $\mathbf{u} \notin \mathbb{L}$
5. Trazamos las paralelas $\mathbb{L}'$ a $\mathbb{L}$ por $\mathbf{u}$ y $\mathbb{L}_1'$ a $\mathbb{L}_1$ por $\mathbf{u}$.

Continuación

Tercer caso

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que no es $\{\vec{0}\}$ ni es una linea.

1. Como $S \neq \{\vec{0}\}$ tiene que existir $\mathbf{v} \in S$ tal que $\mathbf{v} \neq \vec{0}$.
2. Como S no es una linea, debe existir un vector no nulo $\mathbf{w} \in S$ que sea linealmente independiente de $\mathbf{v}$.
3. Sean $\mathbb{L}$ la linea de múltiplos de $\mathbf{v}$ y $\mathbb{L}_1$ la linea de múltiplos de $\mathbf{w}$.
4. Supongamos que $\mathbf{u}$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{u} \in \mathbb{L}$, entonces $\mathbf{u} \in S$. Si $\mathbf{u} \notin \mathbb{L}$
5. Trazamos las paralelas $\mathbb{L}'$ a $\mathbb{L}$ por $\mathbf{u}$ y $\mathbb{L}_1'$ a $\mathbb{L}_1$ por $\mathbf{u}$.
6. Sea $\mathbf{v}' = \mathbb{L} \cap \mathbb{L}_1'$. Entonces $\exists \lambda$ tal que $\mathbf{v}' = \lambda \mathbf{v} \in S$.

Continuación

Tercer caso

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que no es $\{\vec{0}\}$ ni es una linea.

1. Como $S \neq \{\vec{0}\}$ tiene que existir $\mathbf{v} \in S$ tal que $\mathbf{v} \neq \vec{0}$.
2. Como S no es una linea, debe existir un vector no nulo $\mathbf{w} \in S$ que sea linealmente independiente de $\mathbf{v}$.
3. Sean $\mathbb{L}$ la linea de múltiplos de $\mathbf{v}$ y $\mathbb{L}_1$ la linea de múltiplos de $\mathbf{w}$.
4. Supongamos que $\mathbf{u}$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{u} \in \mathbb{L}$, entonces $\mathbf{u} \in S$. Si $\mathbf{u} \notin \mathbb{L}$
5. Trazamos las paralelas $\mathbb{L}'$ a $\mathbb{L}$ por $\mathbf{u}$ y $\mathbb{L}_1'$ a $\mathbb{L}_1$ por $\mathbf{u}$.
6. Sea $\mathbf{v}' = \mathbb{L} \cap \mathbb{L}_1'$. Entonces $\exists \lambda$ tal que $\mathbf{v}' = \lambda \mathbf{v} \in S$.
7. Sea $\mathbf{w}' = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}'$. Entonces $\exists \mu$ tal que $\mathbf{w}' = \mu \mathbf{w} \in S$.

Continuación

Tercer caso

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^2$ que no es $\{\vec{0}\}$ ni es una linea.

1. Como $S \neq \{\vec{0}\}$ tiene que existir $\mathbf{v} \in S$ tal que $\mathbf{v} \neq \vec{0}$.
2. Como S no es una linea, debe existir un vector no nulo $\mathbf{w} \in S$ que sea linealmente independiente de $\mathbf{v}$.
3. Sean $\mathbb{L}$ la linea de múltiplos de $\mathbf{v}$ y $\mathbb{L}_1$ la linea de múltiplos de $\mathbf{w}$.
4. Supongamos que $\mathbf{u}$ es un vector no nulo de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathbf{u} \in \mathbb{L}$, entonces $\mathbf{u} \in S$. Si $\mathbf{u} \notin \mathbb{L}$
5. Trazamos las paralelas $\mathbb{L}'$ a $\mathbb{L}$ por $\mathbf{u}$ y $\mathbb{L}_1'$ a $\mathbb{L}_1$ por $\mathbf{u}$.
6. Sea $\mathbf{v}' = \mathbb{L} \cap \mathbb{L}_1'$. Entonces $\exists \lambda$ tal que $\mathbf{v}' = \lambda \mathbf{v} \in S$.
7. Sea $\mathbf{w}' = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}'$. Entonces $\exists \mu$ tal que $\mathbf{w}' = \mu \mathbf{w} \in S$.
8. Entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}' \in S \Rightarrow S = \mathbb{R}^2$

Conclusión

Finalmente

Los subespacios de $\mathbb{R}^2$ son:

1. $\{\vec{0}\}$
2. Lineas rectas por el origen.
3. Todo $\mathbb{R}^2$.

Subespacios de $\mathbb{R}^3$

Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son:

1. $\{\vec{0}\}$
2. Lineas rectas por el origen.
3. Planos por el origen.
4. Todo $\mathbb{R}^3$.

Operaciones con subespacios

Operaciones

Dados dos subespacios $S_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ podemos formar dos nuevos subespacios. La suma de subespacios

$$S_1 + S_2 = \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in S_1, \mathbf{w} \in S_2\}$$

Y la intersección de subespacios

$$S_1 \cap S_2 = \{\mathbf{v} \in S_1 \cap S_2\}$$

Ejercicio

Demostrar que $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$ son subespacios de $\mathbb{R}^n$.

Definición (Combinación lineal)

Sea $\mathcal{U} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$. Se dice que un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ si existen números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

Ejemplo (Caso $k = 1$)

Si tenemos $\mathbf{v}_1$ un vector $\mathbf{w}$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ si $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1$

Ejemplo (Caso $k = 2$)

Tomemos $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$, entonces $\mathbf{w}$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ Y $\mathbf{v}_2$ si $\mathbf{w} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$. Es decir $\mathbf{w}$ es solución de la ecuación $z = 0$.

Generadores II

Definición (Subespacio Generado)

Sea $\mathcal{U} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$. El subespacio S generado por $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ es el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Voy a usar la notación $S =< \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k >$.

Proposicion

Sea $\mathcal{U} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto finito de vectores de $\mathbb{R}^n$. El subespacio $S =< \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k >$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

Demostración

Hay que ver que S cumple las tres condiciones de subespacio. Como

$$\vec{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k$$

entonces $\vec{0} \in S$.
Si $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k \in S$ y $\mathbf{u} = \mu_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_k\mathbf{v}_k \in S$, entonces

$$\mathbf{w} + \mathbf{u} = (\lambda_1 + \mu_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\lambda_k + \mu_k)\mathbf{v}_k$$

por lo tanto $\mathbf{w} + \mathbf{u} \in S$.
Si $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k\mathbf{v}_k \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha\mathbf{w} = \alpha\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha\lambda_k\mathbf{v}_k \in S,$$

$\square$

Generadores IV

Definición

Dado un subespacio vectorial $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice que un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ de S generan el subespacio S si $S =< \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k >$. Es decir si todos los elementos de S son combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$

Nota

Dos conjuntos distintos pueden generar el mismo espacio. Por ejemplo tomemos $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{w}_1 = (-1, -2), \mathbf{w}_2 = (2, 4)$ veamos que $< \mathbf{v}_1 >=< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 >$. Como $\mathbf{v}_1 = -1\mathbf{w}_1$, entonces si $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}_1 \in< \mathbf{v}_1 >$ vale que $\mathbf{u} = (-\lambda)\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2 \in< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 >$, es decir que $< \mathbf{v}_1 >\subseteq< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 >$. Notemos que $\mathbf{w}_2 = 2\mathbf{v}_1$. Si $\mathbf{u} = \mu_1 \mathbf{w}_1 + \mu_2 \mathbf{w}_2 \in< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 >$, entonces $\mathbf{u} = -\mu_1 \mathbf{v}_1 + 2\mu_2 \mathbf{v}_1 = (-\mu_1 + 2\mu_2)\mathbf{v}_1 \in< \mathbf{v}_1 >$, por lo tanto $< \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 >\subseteq< \mathbf{v}_1 >$.

Generadores V

Ejemplo

Otro ejemplo es tomar el plano Π de ecuación $y = 0$ Los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$ generan Π. Los vectores $\mathbf{w}_1 = (-1, 0, 1), \mathbf{w}_2 = (1, 0, 1), \mathbf{w}_3 = (2, 0, 3)$ también generan Π.

Preguntas

Hay dos preguntas naturales:

1. ¿Dado un subespacio S de $\mathbb{R}^n$ cuales la mínima cantidad de vectores que se necesitan para generarlos?
2. ¿Como se sabe si un conjunto de vectores es mínimo?

Idea

Volvamos el ejemplo anterior. Si tomamos
$\mathbf{w}_1 = (-1, 0, 1), \mathbf{w}_2 = (1, 0, 1), \mathbf{w}_3 = (2, 0, 3)$. Se ve que

$$\mathbf{w}_3 = (1/2)\mathbf{w}_1 + (5/2)\mathbf{w}_2, \text{ o } (1/2)\mathbf{v}_1 + (5/2)\mathbf{w}_2 + (-1)\mathbf{w}_3 = 0$$

Si

$$\mathbf{u} = \mu_1\mathbf{w}_1 + \mu_2\mathbf{w}_2 + \mu_3\mathbf{w}_3$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mu_1\mathbf{w}_1 + \mu_2\mathbf{w}_2 + \mu_3((1/2)\mathbf{w}_1 + (5/2)\mathbf{w}_2) \\ &= (\mu_1 + (1/2)\mu_3)\mathbf{w}_1 + (\mu_2 + (5/2)\mu_3)\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

Vectores linealmente independientes II

Conclusión

Vemos que $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ generan el mismo subespacio.

Proposicion

Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ son un conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ y uno de los vectores, por ejemplo $\mathbf{v}_k$, es combinación lineal de los demás, entonces el espacio generado por $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ es igual al espacio generado por $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$

Proposicion

Dado un conjunto $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ existe un vector que es combinación lineal de los demás $\Leftrightarrow$ existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ no todos nulos tal que

$$\vec{0} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k$$

Vectores linealmente independientes III

Definición

Se dice que un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes si

$$\vec{0} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

Ejemplo

Tomemos $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, -1)$. Si $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \vec{0}$ esto implica que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_2 = 0$. La única solución de estas ecuaciones es $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Como se sabe si un conjunto de vectores son l.i.

Criterios

Supongamos que tenemos vectores $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ con $i = 1, \dots, k$. ¿Como podemos saber si son l.i.? Un modo es formar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{k1} & v_{k2} & \dots & v_{kn} \end{pmatrix}$$

y ver que tiene rango k, es decir que después de hacer eliminación Gaussiana no quedan filas nulas.

Ejemplo 1

Tomemos $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (5, 1, -2)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 1, 0)$. La matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Paso 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -10 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Continuación

Paso 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -10 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 - 2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 3 & 24 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Paso 4

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 3 & 24 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - 3F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 3 & 24 \\ 0 & 4 & 30 \end{pmatrix}$$

Continuación

Paso 5

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 3 & 24 \\ 0 & 4 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - (4/3)F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -10 \\ 0 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Como tenemos una matriz triangular sin filas nulas, los vectores son l.i.

Ejemplo 2

Problema

Tomemos $\mathbf{v}_1 = (4, 1, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (-3, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, -2, 1)$. Queremos ver si son l.i,

Paso 1

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Paso 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_2 + 3F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Continuación

Paso 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_3 - 4F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 9 & -6 \end{pmatrix}$$

Paso 4

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 9 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftrightarrow F_3 + (1.5)F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces hay dos vectores l.i. y el tercero es combinación lineal de los otros.

Base de un subespacio

Definición

Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ son una base de un subespacio $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si se cumplen todas las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ generan S
2. Los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes.

Teorema

Sea S un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ y $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_j$ son dos bases de S, entonces $k = j$.

Definición

Si S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ la cantidad de vectores que tiene cualquier base de S se denomina la dimensión de S.

Ejemplos

dim 1

Una linea recta por el origen está generada por un vector no nulo. Por lo tanto tiene dimensión 1.

dim 2

Un plano en $\mathbb{R}^3$ por el origen está generado por dos vectores no nulos que no son múltiplos uno del otro. Por lo tanto tiene dimensión 2

$\mathbb{R}^2$

Una base de $\mathbb{R}^2$ es $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$, por lo tanto $\mathbb{R}^2$ tiene dimensión 2. Esta base se denomina la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^3$

Una base de $\mathbb{R}^3$ es $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ por lo tanto $\mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3. Esta base se denomina la base canónica de $\mathbb{R}^3$.