Funciones, Límites

Jorge A. Devoto

2 de noviembre de 2020

Repaso de límite

Definición

Sea f una función a valores reales definida para todo $x \in (a,b)$, excepto posiblemente para un valor $x_0 \in (a,b)$ se dice que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

si $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ implica que $|f(x) - l| < \epsilon$

Definición

Sea $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

si $\forall \epsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que $K < x$ implica que $|f(x) - l| < \epsilon$

Definición

Sea $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

si $\forall \epsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que $x < -K$ implica que $|f(x) - l| < \epsilon$

Definición

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l$$

si $\forall \epsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que $|x| < K$ implica que $|f(x) - l| < \epsilon$

Propiedades de los límites

Sean f y g dos funciones. Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$, y que $k \in \mathbb{R}$, entonces vale que

1. $\lim_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = l_1 \pm l_2$
2. $\lim_{x\to x_0} kf(x) = kl_1$
3. $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = l_1 l_2$
4. Si $l_2 \neq 0$, $\lim_{x\to x_0}(f/g)(x) = l_1/l_2$
5. Si $c \in \mathbb{R}$ y existe $\lim_{x\to x_0} f^c(x)$, entonces $\lim_{x\to x_0} f^c(x) = l_1^c$
6. Si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ excepto posiblemente en x_0, entonces $l_1 \leq l_2$

Repaso de Continuidad

Definición

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f es continua en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definición

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se dice que f es continua, si f es continua en x_0 para todo $x_0 \in (a, b)$

Propiedades de las funciones continuas

Sean f y g dos funciones continuas en x_0, entonces

1. $f \pm g$ es continua en x_0
2. fg es continua en x_0
3. Si $g(x_0) \neq 0$, entonces f/g es continua en x_0
4. Si h es una función continua en $y_0 = f(x_0)$, entonces $h \circ f$ es continua en x_0

Funciones escalares y funciones vectoriales

Funciones escalares

Una función escalar (los físicos las llaman campos escalares) de n-variables es una función $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Normalmente se escribe $f(x_1, \dots, x_n)$. Cuando $n = 2$ normalmente se escribe $f(x, y)$ y cuando $n = 3$ se escribe $f(x, y, z)$

Funciones vectoriales

Una función vectorial (los físicos las llaman campos vectoriales) de n-variables es una función $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $m \geq 2$. Se escribe

$$f(x_1, \dots x_n) = (f_1(x_1, \dots x_n), \dots, f_m(x_1, \dots x_n))$$

donde $f_j \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones escalares llamadas las componentes de f.

Ejemplos

Funciones escalares

1. $f(x, y) = \cos(xy) + 3x$
2. $f(x, y, z) = x^2 z + e^{xy} - \operatorname{sen}(3z)$
3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$

Funciones vectoriales

1. $f(x, y) = (xy, x^2 - y^2)$
2. $f(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \operatorname{sen}(y), y)$
3. $f(x, y, z) = (x^2 y^3, \ln(\cos(xyz)))$

Límite

Definición

Dado $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$, un entorno reducido de $\mathbf{v}_0$ es un conjunto de la forma $\mathcal{U} = \mathcal{V} - \{\mathbf{v}_0\}$ donde $\mathcal{V}$ es un conjunto abierto que contiene a $\mathbf{v}_0$

Definición

Dado $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ y dada una función $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ definida en un entorno reducido $\mathcal{U}$ de $\mathbf{v}_0$. Se dice que

$$\lim_{\mathbf{v} \to \mathbf{v}_0} f(\mathbf{v}) = l \in \mathbb{R}^m$$

si $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| < \delta$ implica que $\|f(\mathbf{v}) - l\| < \epsilon$

Nota

La definición de límite es formalmente igual en una o varias variables. Por eso las propiedades formales de los límites son iguales.

Proposicion

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Sea $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_m)$. Si $f(x_1, \dots x_n) = (f_1(x_1, \dots x_n), \dots, f_m(x_1, \dots x_n))$, entonces

$$\lim_{\mathbf{v} \to \mathbf{v}_0} f(x_1, \dots x_n) = \mathbf{l} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{v} \to \mathbf{v}_0} f_j(x_1, \dots x_n) = l_j, \forall 1 \leq j \leq m$$

Nota

La proposición anterior nos dice que para estudiar límites basta considerar funciones escalares. Esta proposición es consecuencia de la siguiente desigualdad: dado un vector en $\mathbb{R}^n$ se cumple

$$|x_k| \leq \|(x_1, \dots, x_n)\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \quad 1 \leq k \leq n$$

Propiedades de los límites

Sean f y g dos funciones a valores escalares. Supongamos que $\text{lím}_{\mathbf{v}\to+\mathbf{v}_0} f(\mathbf{v}) = l_1$, $\text{lím}_{\mathbf{v}\to+\mathbf{v}_0} g(\mathbf{v}) = l_2$, y que $k \in \mathbb{R}$, entonces vale que

1. $\text{lím}_{\mathbf{v}\to\mathbf{v}_0}(f \pm g)(x) = l_1 \pm l_2$
2. $\text{lím}_{\mathbf{v}\to\mathbf{v}_0} kf(x) = kl_1$
3. $\text{lím}_{\mathbf{v}\to\mathbf{v}_0}(fg)(x) = l_1 l_2$
4. Si $l_2 \neq 0$, $\text{lím}_{\mathbf{v}\to\mathbf{v}_0}(f/g)(x) = l_1/l_2$
5. Si $c \in \mathbb{R}$ y existe $\text{lím}_{\mathbf{v}\to\mathbf{v}_0} f^c(x)$, entonces $\text{lím}_{\mathbf{v}\to\mathbf{v}_0} f^c(x) = l_1^c$
6. Si $f(\mathbf{v}) < g(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{U}$ donde $\mathcal{U}$ es un entorno reducido de $\mathbf{v}_0$, entonces $l_1 \leq l_2$

Ejemplo

Tomemos

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2}$$

Notemos que la función no está definida en $(1,1)$.

<u>Solución:</u> Vale que

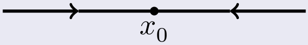
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2} &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(2x+y)(x-y)}{(x+y)(x-y)} \\ &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(2x+y)}{(x+y)} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Nota: En este límite suponemos que (x,y) no se acerca a $(1,1)$ por la recta $x = y$

Diferencia entre una y varias variables

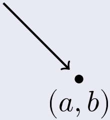
Una variable

Cuando $x \to x_0$ hay solo dos direcciones de acercamiento



Dos variables

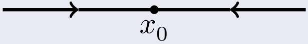
Hay muchas direcciones de acercamiento. Cuando $(x, y) \to (a, b)$ podemos acercarnos por lineas rectas



Diferencia entre una y varias variables

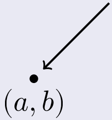
Una variable

Cuando $x \to x_0$ hay solo dos direcciones de acercamiento



Dos variables

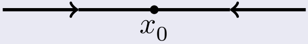
Hay muchas direcciones de acercamiento. Cuando $(x, y) \to (a, b)$ podemos acercarnos por lineas rectas



Diferencia entre una y varias variables

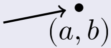
Una variable

Cuando $x \to x_0$ hay solo dos direcciones de acercamiento



Dos variables

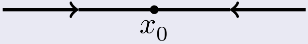
Hay muchas direcciones de acercamiento. Cuando $(x, y) \to (a, b)$ podemos acercarnos por lineas rectas



Diferencia entre una y varias variables

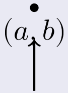
Una variable

Cuando $x \to x_0$ hay solo dos direcciones de acercamiento



Dos variables

Hay muchas direcciones de acercamiento. Cuando $(x, y) \to (a, b)$ podemos acercarnos por lineas rectas



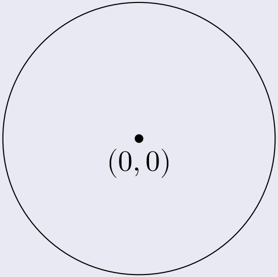
Curvas en el plano

Definición

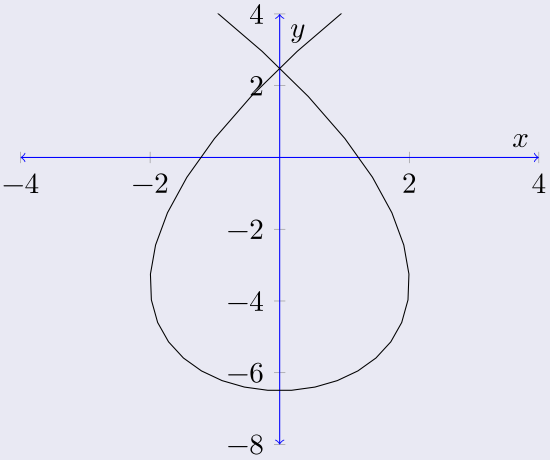
Una curva continua parametrizada en $\mathbb{R}^2$ es una función $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, con $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tal que las funciones $x(t)$, $y(t)$ son continuas.

Ejemplo 1

Sea $\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), t \in [0, 2\pi]$ se obtiene el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1



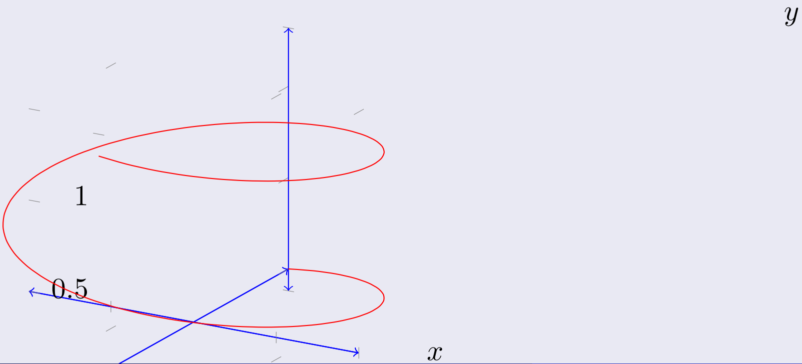
Ejemplo 2 $\gamma(t) = (t^3 - 3t, 3t^2 - 6.5)$



Definición

Una curva continua parametrizada en $\mathbb{R}^3$ es una función $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, con $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ tal que las funciones $x(t)$, $y(t)$, y $z(t)$ son continuas.

Ejemplo 1: La hélice $(\cos(t), \mathrm{sen}(t), t)$



Límites curvilineos

Definición

Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ pasa por un punto $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ si existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $\gamma(t_0) = \mathbf{v}_0$

Definición

Sea $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función definida en un entorno reducido de $\mathbf{v}_0$. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una curva que cumple que $\gamma(t_0) = \mathbf{v}_0$ para algún $t_0 \in [a, b]$ definimos el límite de f a lo largo de la curva γ cuando $\mathbf{v} \to \mathbf{v}_0$ como $\lim_{t \to t_0}(f(\gamma(t)))$.

Nota

La idea es que el límite de f a lo largo de una curva es un límite de una variable y por lo tanto es más fácil de estudiar.

Teorema

Si $\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{v}_0} f(\mathbf{v}) = l$ entonces para cualquier curva γ que pase por $\mathbf{v}_0$ el límite de f a lo largo de la curva γ cuando $\mathbf{v} \to \mathbf{v}_0$ es l

Nota

Este teorema se usa del modo siguiente: Si no existe el límite a lo largo de una curva, o el límite a lo largo de dos curvas distintas es distinto, entonces no existe $\lim_{\mathbf{v}\to\mathbf{v}_0} f(\mathbf{v}) = l$

Nota

El problema con los límites curvilineos es que puede ser difícil encontrar curvas que pasen por $\mathbf{v}_0$.

Límites direccionales

Nota

Un modo de resolver este problema es tomar lineas rectas que pasen por $\mathbf{v}_0$. Sea $\mathbf{w} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo. Se define el límite de f en la dirección del vector $\mathbf{w}$ como

$$\lim_{t \to 0} f(\mathbf{v}_0 + t\mathbf{w})$$

El teorema nos dice entonces que si existe $\lim_{\mathbf{v} \to \mathbf{v}_0} f(\mathbf{v}) = l$ entonces todos los límites direccionales existen y son iguales. El problema es que puede pasar que todos los límites direccionales son iguales, pero el límite no existe.

Ejemplo

Tomemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+3y^4}$$

<u>Solución</u> En este caso $f(x,y) = (x^2y^2)/(x^4+3y^4)$. Hay un modo de considerar todos los límites direccionales al mismo tiempo: tomemos $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, entonces $f((0,0)+t(w_1,w_2)) = f(tw_1, tw_2)$ y

$$f(tw_1, tw_2) = \frac{(tw_1)^2(tw_2)^2}{(tw_1)^4+3(tw_2)^4} = \frac{t^4}{t^4}\left(\frac{(w_1)^2(w_2)^2}{(w_1)^4+3(w_2)^4}\right)$$

por lo tanto

$$\lim_{t\to 0} f(tw_1, tw_2) = \frac{(w_1)^2(w_2)^2}{(w_1)^4+3(w_2)^4}$$

Si tomamos $\mathbf{w} = (0,1)$ el límite es 0. Si tomamos $\mathbf{w} = (1,1)$ el límite es $1/4$. Por lo tanto no existe el límite.

Ejemplo

Tomemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

<u>Solución</u> Consideramos dos casos. El primero es $\mathbf{w} = (w_1, 0)$. Entonces $f(tw_1, 0) = 0$ para todo t, por lo tanto el límite es 0. Si $\mathbf{w} = (w_1, w_2),\ w_2 \neq 0$, entonces

$$f(tw_1, tw_2) = \frac{t^3w_1^2w_2}{t^4w_1^4 + t^2w_2^2} = \frac{tw_1^2w_2}{t^2w_1^4 + w_2^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

En definitiva todos los límites direccionales son 0, Si nos acercamos por la curva $\gamma(t) = (t, t^2)$, entonces

$$f(t, t^2) = \frac{t^4}{2t^4} \xrightarrow[t\to 0]{} 1/2$$

Cotas

Definición

Una función $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es acotada si existe $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $||f(x_1, \ldots, x_n)|| < K$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{U}$

Nota

Una función $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $f(x_1, \ldots x_n) = (f_1(x_1, \ldots x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots x_n))$. Entonces f es acotada si y solo si f_j es acotada para todo $1 \leq j \leq m$. Esto se demuestra usando la misma desigualdad que usamos para los límites. Por esta razón es suficiente considerar el caso de funciones escalares.

Propiedades de las funciones acotadas.

Sean $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas. Entonces

1. $f \pm g$ es acotada.
2. fg es acotada.
3. Si tenemos $h : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ una función y $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada, entonces $k \circ h$ es acotada.

Idea

Si tenemos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y queremos estudiar la acotación, entonces se puede usar la idea de tomar direcciones. Es decir para cada $\mathbf{v} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ podemos estudiar la acotación de la función $h_{\mathbf{v}}(t) = f(t\mathbf{v})$. Vale que si f es acotada, entonces todas las funciones $h_{\mathbf{v}}$ son acotadas.