Significado geométrico del gradiente

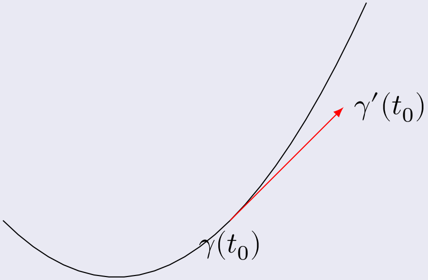
Jorge A. Devoto

6 de junio de 2021

Curvas suaves

Definición

Una curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, con $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ es suave si las funciones $x_j(t)$ son derivables en (a, b). En ese caso si $a < t_0 < b$ el vector $\gamma'(t_0) = (x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0))$ se llama el vector tangente en $\gamma(t_0)$



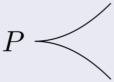
Definición

Una curva $C \subset \mathbb{R}^n$(piensen en la idea intuitiva de una curva) es suave si para cada punto $\mathbf{v}_0 \in C$ existe una curva parametrizada suave $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in (a,b)$ tal que $\gamma(t) \in C$, para todo $t \in [a,b]$ y $\gamma(t_0) = \mathbf{v}_0$. En ese caso vamos a decir que γ es una parametrización de C cerca de $\mathbf{v}_0$

Nota

Una idea intuitiva es pensar a una curva como una ruta en un mapa. Entonces parametrizar una curva es recorrer esa ruta en un auto anotando en cada instante t la posición exacta del auto.

Una curva no suave en un punto P



Derivadas a lo largo de curvas y direccionales

Definición

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función donde $\mathcal{U}$ es un abierto. Si $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}$ y $\gamma : (a, b) \to \mathcal{U}$ es una curva con $\gamma(t_0) = \mathbf{v}_0$ ($t_0 \in (a, b)$) se define la derivada de f a lo largo de γ en $\mathbf{v}_0$ como $(f \circ \gamma)'(t_0)$ (cuando esta derivada existe)

Si $\mathbf{v}$ es un vector y $\gamma(t) = \mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}$ definida para $t \in (-r, r)$ se define la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{v}$ por

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{v}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}_0)}{t}$$

Nota

Cuando $\mathbf{v} = e_j$ donde e_j son los vectores de la base canónica, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{v}_0)$$

Propiedades

Nota

Vamos a usar la siguiente notación

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}_0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{v}_0), \quad D_j f(\mathbf{v}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{v}_0)$$

Propiedades básicas

Valen las mismas fórmulas básicas que para las derivadas usuales

1. $D_{\mathbf{v}}(f \pm g)(\mathbf{v}_0) = D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}_0) \pm D_{\mathbf{v}} g(\mathbf{v}_0)$.
2. $D_{\mathbf{v}}(fg)(\mathbf{v}_0) = g(\mathbf{v}_0) D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}_0) + f(\mathbf{v}_0) D_{\mathbf{v}} g(\mathbf{v}_0)$
3. SI $\mathbf{w} = k\mathbf{v}$ donde $k \in \mathbb{R}$, entonces $D_{\mathbf{w}} f(\mathbf{v}_0) = k D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}_0)$.
4. Si $h : (c, d) \to \mathbb{R}$ es una función derivable y $f(\mathbf{v}_0) \in (c, d)$, entonces $D_{\mathbf{v}}(h \circ f)(\mathbf{v}_0) = h'(f(\mathbf{v}_0)) D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}_0)$.

Nota

Muchos libros y autores trabajan solo con vectores de norma 1 para definir derivadas direccionales. Esto se justifica por la propiedad 3.

Teorema

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbf{v}_0$. Sea $\gamma : (a, b) \to \mathcal{U}$ una curva parametrizada suave y supongamos que $\gamma(t_0) = \mathbf{v}_0$ para un cierto $t_0 \in (c, d)$, sea $\gamma'(t_0)$ el vector tangente a la curva en $\mathbf{v}_0$, entonces

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\mathbf{v}_0) \cdot \gamma'(t_0)$$

Corolario

Vale que si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en $\mathbf{v}_0$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v}_0) = \nabla f(\mathbf{v}_0) \cdot \mathbf{v}$$

Curvas de nivel

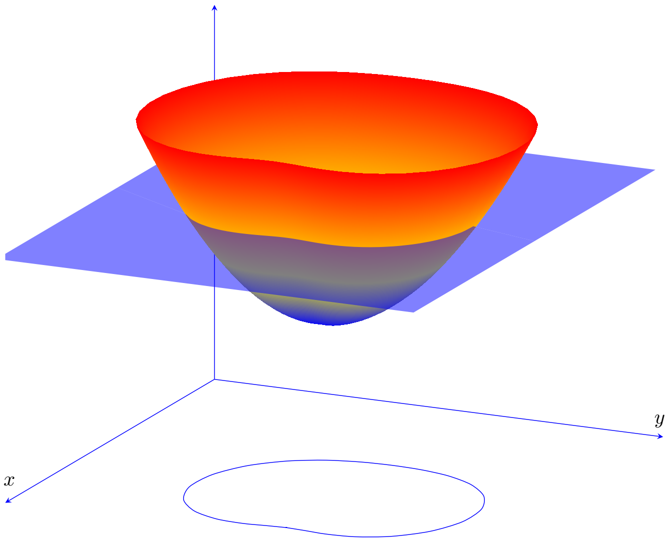
Recordar

Supongamos que tenemos una función $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para cada $c \in \mathbb{R}$ la curva de nivel c son las soluciones de la ecuación $f(x, y) = c$.

Teorema

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable (Vamos a suponer de clase $\mathcal{C}^1$) y sea C la curva de nivel $f(x, y) = c$. Si C es no vacía y en cada punto (x_0, y_0) de C se cumple que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, entonces C es una curva suave.

Idea de curva de nivel



Relación con el gradiente

Idea

Supongamos que tenemos una función diferenciable $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Sea $c \in \mathbb{R}$ y sea C la curva de nivel $f(x,\, y) = c$. Suponemos $C \neq \emptyset$ y que C es suave. Si $p = (x_0, y_0)$ es un punto de C y $\gamma : (a, b) \to \mathcal{U}$ es una parametrización de C cerca de p con $\gamma(t_0) = p$ para un cierto $t_0 \in (a, b)$. Como $f(\gamma(t)) = c$ para todo $a < t < b$, entonces

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = 0, \text{ pero } (f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0).\gamma'(t_0)$$

si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ entonces

$$\nabla f(x_0, y_0) \perp \gamma'(t_0)$$

Nota

Cualquier vector tangente a C en p es un vector tangente para alguna curva parametrizada γ.

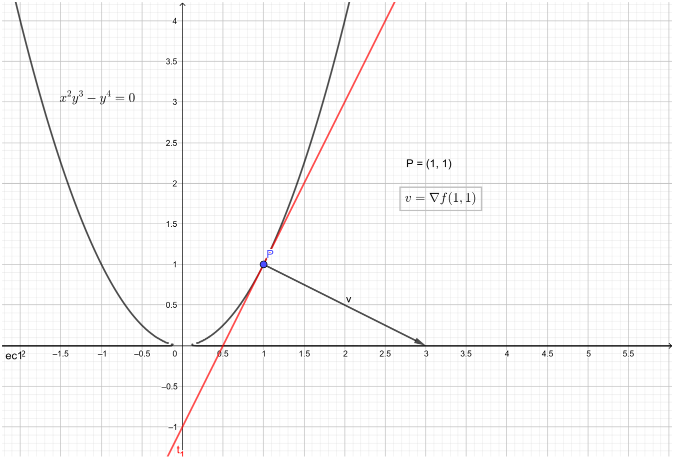
Proposicion

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea $k \in \mathbb{R}$ y sea C la curva de nivel $f(x, y) = k$. Suponemos $C \neq \emptyset$. Si $p = (x_0, y_0)$ es un punto de C y $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a la recta tangente a C por p.

Ejemplo

Tomemos $f(x, y) = x^2y^3 - y^4$ y sea C la curva de nivel 0 de f.

1. Entonces C son las soluciones de $x^2y^3 - y^4 = 0$
2. Como $x^2y^3 - y^4 = y^3(x^2 - y)$ entonces C es la unión del eje x con la parábola $y = x^2$
3. Tomemos $p = (1, 1)$, como $f(1, 1) = 0$ el punto $p \in C$. Este punto está en la parábola.
4. Podemos parametrizar la parábola cerca de p con $\gamma(t) = (t, t^2)$, vale que $\gamma(1) = p$
5. Tenemos
$$\nabla f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2 - 4y^3),\ \nabla f(1, 1) = (2, -1),$$
6. Por otro lado $\gamma'(t) = (1, 2t)$ y por lo tanto $\gamma'(1) = (1, 2)$. Finalmente
$$\nabla f(1, 1) \cdot \gamma'(1) = (2, -1) \cdot (1, 2) = 0$$


$x^2y^3 - y^4 = 0$
P = (1, 1)
$v = \nabla f(1, 1)$
P
v
ec1
t

Idea geométrica

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. una función diferenciable Sea $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ y sea $q_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
Si tenemos un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ podemos considerar recta C dada por

$$\gamma(t) = (tv_1 + x_0, tv_2 + y_0, 0)$$

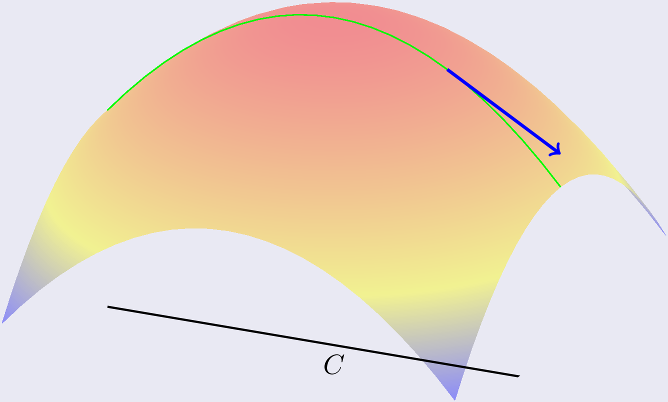
y la curva D dada por

$$\sigma(t) = (tv_1 + x_0, tv_2 + y_0, f(tv_1 + x_0, tv_2 + y_0))$$

Esta curva está contenida en el gráfico de f y $\sigma(0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
Su derivada es

$$\sigma'(0) = \left(v_1, v_2, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)\right)$$

En la figura siguiente la recta C está en negro, la curva D en verde y el vector $\sigma'(0)$ en azul



Nota

La tercer componente del vector $\sigma'(0)$ mide la pendiente de la curva σ en el punto q_0

Problema

Queremos saber para que dirección de movimiento esa pendiente es máxima,

Nota

Hay que poner una restricción al problema. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante positiva vale que

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$$

por lo cual tomando $\lambda \to \infty$ se puede hacer la derivada direccional (si $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) \neq 0$) tan grande como uno quiera.

Solución

La restricción que ponemos es que $||\mathbf{v}|| = 1$. Después de todo solo nos interesa la dirección representada por $\mathbf{v}$ Recordemos que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0).\mathbf{v}$$

Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ tenemos

$$\nabla f(x_0, y_0).\mathbf{v} = ||\nabla f(x_0, y_0)||||\mathbf{v}||cos(\theta) = ||\nabla f(x_0, y_0)||cos(\theta)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\mathbf{v}$

Como $-1 \leq cos(\theta) \leq 1$ tenemos

$$-||\nabla f(x_0, y_0)|| \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) \leq ||\nabla f(x_0, y_0)||$$

Si tomamos

$$\mathbf{v} = \frac{1}{||\nabla f(x_0, y_0)||} \nabla f(x_0, y_0)$$

entonces $\theta = 0$, $\cos(0) = 1$ y obtenemos el valor máximo

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = ||\nabla f(x_0, y_0)||$$

Otras dos direcciones interesantes son tomar $\theta = \pi$ en ese caso estamos tomando

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{||\nabla f(x_0, y_0)||} \nabla f(x_0, y_0)$$

y obtenemos la dirección de mayor decrecimiento. En general

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) > 0 \Leftrightarrow \measuredangle(\nabla f(x_0, y_0), \mathbf{v}) < \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \measuredangle(\nabla f(x_0, y_0), \mathbf{v}) = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) < 0 \Leftrightarrow \measuredangle(\nabla f(x_0, y_0), \mathbf{v}) > \frac{\pi}{2}$$