GEOMETRÍA PROYECTIVA

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2022

El objetivo de este curso es brindar una introducción a la Geometría Diferencial y a la Geometría Algebraica. El tema central es el estudio de subvariedades de espacios euclídeos, afines y proyectivos (reales y complejos). Consideraremos especialmente los siguientes ejemplos: curvas paramétricas planas y espaciales, superficies en el espacio tridimensional, cuádricas, y curvas algebraicas planas, tanto afines como proyectivas.

PROGRAMA

1) **Curvas.**
Curvas paramétricas y curvas en forma implícita. Ejemplos. Puntos regulares y singulares. Longitud de arco, curvatura, torsión. Contacto; rectas, planos y esferas osculadores. Familias de curvas; envolventes. Familias de curvas definidas por ecuaciones diferenciales. Ecuaciones de Frenet. Teorema de clasificación ortogonal.

Referencia: [6]. Otras: [12], [13], [15], [17], [19], [20], [21], [22].

2) **Cuádricas.**
Formas bilineales. Formas cuadráticas; rango, signatura. Cuádricas; rango, centro, puntos singulares. Clasificación afín y ortogonal. Otros problemas de clasificación, acción de un grupo en un conjunto, invariantes.

Referencia: [4]. Otras: [1], [2], [9], [10], [14].

3) **Variedades.**
Aplicaciones diferenciables $U \to \mathbb{R}^n$ con $U \subset \mathbb{R}^d$ abierto; cartas. Subvariedades diferenciales de $\mathbb{R}^n$. Subvariedades algebraicas de K^n. Definiciones y primeros ejemplos. Espacio tangente, puntos regulares y puntos singulares. Funciones diferenciables, derivada.

Referencias: [18], [8].

4) **Superficies.**
Ejemplos: superficies de revolución, superficies regladas. Primera forma fundamental; distancia en la superficie. Isometrías, deformaciones. Aplicación de Gauss. Segunda forma fundamental. Curvatura media y Gaussiana. Direcciones principales. Puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos. Teorema egregio de Gauss. (Opcional: Ecuaciones de compatibilidad, teorema de clasificacion ortogonal de superficies. Geodésicas. Geometrías no-Euclideanas, disco de Poincaré. Teorema de Gauss-Bonnet).

Referencia: [6]. Otras: [12], [13], [15], [19], [20], [21], [22].

5) **Introducción a la geometría axiomática.**
Definición axiomática de plano afín y de plano proyectivo. Propiedades de Pappus y de Desargues, caracterización de $\mathbb{P}^2(K)$.

Referencia: [11]. Otras: [16]

6) **Curvas algebraicas afines.**
Curvas algebraicas en el plano afín K^2. Puntos singulares, multiplicidad, cono tangente. Anillo de series formales; ramas de una curva algebraica en un punto. Multiplicidad de intersección; varias definiciones y su equivalencia. Asíntotas. Intersecciones de curvas y la resultante.

Referencia: [8]. Otras: [3], [4], [5], [7], [23].

7) **Espacios proyectivos y curvas algebraicas proyectivas.**
Espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(K)$. Coordenadas homogéneas y coordenadas afines. Hipersuperficies de grado d. Homogeneización y deshomogeneización. Curvas algebraicas en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(K)$. Teorema de Bézout. Curvas racionales. Puntos de inflexión y el Hessiano. Clasificación de cuatro puntos en $\mathbb{P}^1(K)$, razón doble, invariante j. Cúbicas: clasificación, forma de Weierstrass. Género. Aplicaciones racionales entre curvas. Transformaciones cuadráticas, desingularización. Curva dual, fórmulas de Plücker.

Referencia: [8]. Otras: [3], [4], [5], [7], [23].

Como complemento a las notas de clase, las *referencias principales* para la materia son [6] y [8].

Referencias

[1] Apostol: Calculus, vols. 1, 2.
[2] Bourbaki: Algebre, Chapitre 9, Formes sesquilineaires et formes quadratiques.
[3] Chenciner: Courbes algebriques planes.
[4] Cukierman: Cuádricas y cúbicas.
[5] Cukierman: Notas sobre el teorema de Bezout.
`http://mate.dm.uba.ar/~fcukier/Teaching.htm`
[6] Do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces.
[7] Fischer: Plane algebraic curves.
[8] Fulton: Algebraic curves.
`http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf`
[9] Gantmacher: Matrix theory, vols. 1, 2.
[10] Gelfand: Lectures on linear algebra.
[11] Hartshorne: Foundations of projective geometry.
[12] Hilbert and Cohn-Vossen: Geometry and the imagination.
[13] Klingenberg: Curso de geometria diferencial.
[14] Lang: Algebra.
[15] Pogorelov: Differential geometry.
[16] Prasolov and Tikhomirov: Geometry.
[17] Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo: Análisis matemático, vols. I-III.
[18] Spivak: Calculus on manifolds.
[19] Spivak: A comprehensive introduction to differential geometry, Vols. 2, 3.
[20] Stoker: Differential geometry.
[21] Struik: Lectures on classical differential geometry.
[22] Valiron: The classical differential geometry of curves and surfaces.
[23] Walker: Algebraic curves.