Autovectores y autovalores

Jorge A. Devoto

16 de abril de 2021

Definición básica

Definición

Sea A una matriz cuadrada de n filas y n columnas. Los coeficientes pueden ser reales o complejos. Un vector $\mathbf{v} \neq \vec{0}$ es un autovector de A si existe un número λ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

El número λ se llama el autovalor asociado al vector $\mathbf{v}$.

Importante

Existe $\mathbf{v} \neq \vec{0}$ tal que $A\mathbf{v} = \vec{0}$ si y solo si $\mathrm{Nu}(A) \neq \{\vec{0}\}$. Si $\det(A) \neq 0$ la matriz A es invertible, si $A\mathbf{v} = \vec{0}$, entonces $A^{-1}A\mathbf{v} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$. Por lo tanto $\mathbf{v} = \vec{0}$. La conclusión es que 0 es un autovalor de A implica que $\det(A) = 0$.

Resultados importantes

Proposicion

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal biyectiva. Entonces la función inversa $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal.

Demostración

Sean $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{v} = T(T^{-1}\mathbf{v})$ y $\mathbf{w} = T(T^{-1}\mathbf{w})$, por lo tanto

$$\begin{aligned} T^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= T^{-1}(T(T^{-1}\mathbf{v}) + T(T^{-1}\mathbf{w})) \\ &= T^{-1}(T(T^{-1}\mathbf{v} + T^{-1}\mathbf{w}))) \\ &= T^{-1}\mathbf{v} + T^{-1}\mathbf{w} \end{aligned}$$

Del mismo modo si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = T^{-1}(\lambda T(T^{-1}\mathbf{v})) = T^{-1}(T(\lambda T^{-1}\mathbf{v})) = \lambda T^{-1}\mathbf{v}$$

$\square$

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y sea $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la transformación lineal asociada. Son equivalentes:

1. A es invertible.
2. T_A es una función biyectiva.
3. $\mathrm{Nu}(T_A) = \{\vec{0}\}$
4. $\mathrm{Im}\,(T_A) = \mathbb{R}^n$

Corolario

$\lambda = 0$ es un autovalor de A si y solo si $\det(A) = 0$.

Demostración

$1 \Rightarrow 2$ Si A es invertible, sea $T' = T_{A^{-1}}$, entonces

$$T'(T_A\mathbf{v}) = T'(A\mathbf{v}) = A^{-1}(A\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$
$$T_A(T'\mathbf{v}) = A(T'\mathbf{v}) = A(A^{-1}\mathbf{v}) = \mathbf{v}$$

Por lo tanto $T' = T_A^{-1}$ y la función T_A es biyectiva.
$2 \Rightarrow 3$ Si $\mathbf{v} \in \mathrm{Nu}(T_A)$, entonces $\mathbf{v} = T_A^{-1}(T_A\mathbf{v}) = T_A^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$. Por lo tanto $\mathrm{Nu}(T_A) = \{\vec{0}\}$
$3 \Rightarrow 4$ Por el teorema de Rango-Nulidad
$n = \dim(\mathrm{Nu}(T_A)) + \dim(\mathrm{Im}\,(T_A)) = 0 + \dim(\mathrm{Im}\,(T_A))$. Entonces $\mathrm{Im}\,(T_A) = \mathbb{R}^n$
$4 \Rightarrow 1$. Si $\mathrm{Im}\,(T_A) = \mathbb{R}^n$, por el teorema de Rango-Nulidad vale que $\mathrm{Nu}(T_A) = \{\vec{0}\}$, entonces T_A es biyectiva. Por la proposición $T' = T_A^{-1}$ es una transformación lineal. Si $B_{T'}$ es la matriz asociada a T' es fácil ver que $B_{T'} = A^{-1}$ $\square$

Como calcular autovalores

Idea

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Vamos a ver si -2 es un autovalor de A. Buscamos un vector $\mathbf{v} \neq \vec{0}$ tal que $A\mathbf{v} = -2\mathbf{v}$. Sea id la matriz identidad. Entonces $-2\mathbf{v} = -2id\mathbf{v}$ y nos queda la ecuación $A\mathbf{v} = -2Id\mathbf{v}$ que es equivalente a $A\mathbf{v} + 2id\mathbf{v} = \vec{0}$ que es equivalente a $(A + 2id)\mathbf{v} = \vec{0}$. Por la observación que hemos hecho esto va a ocurrir sii $\det(A + 2id) = 0$

Continuación

Nos queda

$$A + 2id = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

esta matriz tiene determinante 0. Para calcular los autovectores asociamos planteamos el sistema

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos por eliminación Gaussiana.

$F_1 \to (1/4)F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 8 & 5 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$F_2 \to F_2 - 2F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$F_3 \to F_3 + F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$F_2 \to (1/8)F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$F_3 \to F_3 - 5F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente

O sea que el vector que buscamos tiene que cumplir

$$v_2 + (1/2)v_3 = 0 \quad v_1 + (1/2)v_3 = 0$$

NO hay restricciones en v_3. Tomando por ejemplo $v_3 = 1$ obtenemos

$$\mathbf{v} = (-1/2, 1/2, 1)$$

Calculo de autovalores

Resumen

Para que un número λ sea un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se tiene que cumplir $P_A(\lambda) = \det(\lambda id - A) = (-1)^n \det(A - \lambda id) = 0$ Entonces para calcular los autovalores se toma a λ como una variable y se calcula el determinante $\det(\lambda id - A)$. Se obtiene un polinomio $P_A(\lambda)$, llamado polinomio característico, y los autovalores son las raíces de ese polinomio.

Nota

En muchos libros se define el polinomio característico como $\det(A - \lambda id)$. Como ambos polinomios tienen las mismas raíces no hay problema.

Nota (Caso 2×2)

Cuando A es de 2×2 vale que $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A)$.

Ejemplo

Problema

Calcular los autovalores de

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Entonces

$$\lambda id - A = \begin{pmatrix} \lambda - 6 & 1 & -3 \\ -9 & \lambda & -3 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Continuación

Desarrollando por la tercera fila tenemos

$$\det(\lambda id - A) = (-1)^{3+3}(\lambda - 1)\det\begin{pmatrix} \lambda - 6 & 1 \\ -9 & \lambda \end{pmatrix}$$

O sea

$$(1-\lambda)((\lambda)(\lambda-6)+9) = (\lambda-1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9)$$

pero

$$(\lambda-1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

Tiene 1 como raíz simple y 3 como raíz doble (multiplicidad 2). Los autovalores son 1 y 3.

Multiplicidades

Nota

Si tenemos un polinomio $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ buscamos sus raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Cada raíz la contamos tantas veces como sea su multiplicidad.

Caso $\mathbb{R}$

En el caso de los reales puede ser que el polinomio tenga menos raíces que su grado. Si $P(\lambda)$ es el polinomio característico de una matriz A, esta matriz no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Nota

En el ejemplo anterior diríamos que las raíces son $1, 3, 3$

Ejemplo

Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + 1 > 0, \forall \lambda$. En ese caso se dice que A no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

Caso $\mathbb{C}$

Sobre los complejos todos los polinomios tienen raíces.

Ejemplo

$(1 - \lambda)^2 + 1$ tiene raíces $(1 + i), (1 - i)$

Multiplicidad algebraica

Definición

Si $P(\lambda)$ es un polinomio de grado n y $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son las raíces distintas de P (sobre $\mathbb{C}$) entonces se puede escribir

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$$

Los números r_j se llaman las multiplicidades algebraicas de las raíces. Se debe cumplir

$$n = r_1 + r_2 + \cdots + r_k$$

Ejemplo

Volvamos al caso

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2$ Es decir 1 tiene multiplicidad algebraica 1 y 3 tiene multiplicidad algebraica 2.

Multiplicidad Geométrica

Definición

La multiplicidad geométrica de un autovalor λ_k de una matriz A de $n \times n$ es

$$\gamma_j = \dim(\mathrm{Nu}(\lambda_k id - A)) = n - \mathrm{rang}(\lambda_k id - A)$$

Proposicion

Vale siempre que la multiplicidad geométrica de un autovalor es menor o igual que su multiplicidad algebraica

$$1 \leq \gamma_j \leq r_j \leq n$$

Si $r_j = 1$ entonces $\gamma_j = 1$.

Matrices diagonalizables

Definición

Una matriz A es diagonalizable si existe una matriz C invertible tal que

$$D = C^{-1}AC$$

es una matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Continuación

Teorema

Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ si su polinomio característico $P_A(\lambda)$ tiene todas sus raíces y para cada raíz λ_j se cumple que $r_j = \gamma_j$

Como saber si A es diagonalizable

Los pasos que se deben seguir son

1. Calcular el polinomio característico $P_A(\lambda)$
2. Hallar los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Si algún autovalor es complejo, entonces A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.
3. Para cada autovalor λ_j no simple calcular las multiplicidades algebraicas y geométricas. Si alguna no es igual. entonces A no es diagonalizable en $\mathbb{R}$.
4. Calcular la matriz C.

Ejemplo

Veamos si

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 9 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

Pasos a realizar

Las raíces del polinomio son 1 y 3. Como 1 tiene multiplicidad algebraica 1 no hay problema. Pero 3 tiene multiplicidad algebraica 2.

$$3id - A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ -9 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$F_1 \to (1/3)F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 9 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$F_2 - 9F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Conclusión

Con esto se ve que el rango de $3id - A$ es 2. Por lo tanto la multiplicidad geométrica de 3 es 1. Por lo tanto A no es invertible.

Ejemplo

Tomemos ahora

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 - 11\lambda + 18$$

Los autovalores son $9, 1, -2$. Son todas raíces simples por lo tanto A es diagonalizable.

Como calcular C

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea λ un autovalor de A. El subespacio $V_\lambda = \mathrm{Nu}(\lambda id - A)$ se denomina el autoespacio asociado al autovalor λ

Proposicion

Sean λ_1 y λ_2 dos autovalores distintos de una matriz A. Entonces $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\vec{0}\}$

Demostración

Si $\mathbf{v} \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$, entonces $\lambda_1 \mathbf{v} = A\mathbf{v} = \lambda_2 \mathbf{v}$ por lo tanto $\mathbf{v} = \vec{0}$ $\square$

Como calcular C parte II

Construcción de C

Supongamos que A es una matriz de $n \times n$ diagonalizable. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ los autovalores de A y sea r_j la multiplicidad de λ_j. Para calcular C hay que hacer lo siguiente:

1. Para cada $1 \leq j \leq k$ hallar una base $\mathbf{v}_{ij}$ con $1 \leq i \leq r_j$ de V_{λ_j}. Poniendo juntos todos los vectores $\mathbf{v}_{ij}$ se obtiene una base de $\mathbb{R}^n$
2. Formar la matriz C poniendo como columnas los vectores $\mathbf{v}_{ij}$

Ejemplo

Teníamos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Loa autovalores son $9, 1, -2$. Los autovectores asociados son

$$v_1 = (1, 13/2, 7/2),\ v_2 = (1, 1/10, -1/2),\ \ v_3 = (1, 1, -2)$$

La matriz C

Tomo

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{13}{2} & \frac{1}{10} & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

El determinante de C es $66/5$ por lo tanto C es invertible.

Continuación

Vale que

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{44} & \frac{5}{44} & \frac{3}{44} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{12} \\ -\frac{3}{11} & \frac{10}{33} & -\frac{16}{33} \end{pmatrix}$$

y

$$D = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Tomemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es $P_A(\lambda) = (\lambda - 3)((\lambda - 1)^2 - 4)$. Este polinomio tiene raíces $\lambda_1 = -1$ (simple) y $\lambda_2 = 3$ (doble).

La situación en -1

Tenemos

$$-id - A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -4 \\ -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Un autovector es $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$

La situación en 3

Tenemos

$$3id - A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dos autovectores l.i. son $\mathbf{v}_2 = (2, 0, 1)$ y $\mathbf{v}_3 = (0, 2, -1)$ Como 3 tiene multiplicidad geométrica 2 la matriz A es diagonalizable. . La matriz C es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Potencias

Supongamos que queremos calcular A^{10}. La idea es $A = CDC^{-1}$ entonces

- $A^2 = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1}$
- $A^3 = (CDC^{-1})(CD^2C^{-1}) = CD^3C^{-1}$
- $A^n = CD^nC^{-1}$

y

$$D^n = \begin{pmatrix} 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$