Derivadas parciales y gradiente

Jorge A. Devoto

4 de junio de 2021

Repaso de derivada

Definición

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Si $x_0 \in (a, b)$ se dice que f es derivable en x_0 si existe

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tomando $h = x - x_0$ también se puede escribir

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definición

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se dice que f es derivable si f es derivable en todos los puntos de (a, b).

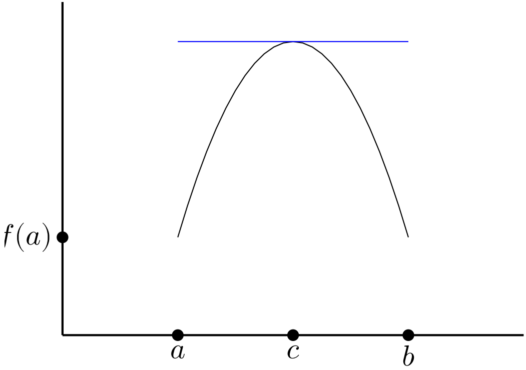
Propiedades fundamentales

Sean $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $x_0 \in (a, b)$. Sea $k \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $f + g$ es derivable en x_0 y vale que $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. El producto fg es derivable en x_0 y vale que $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
3. kf es derivable en x_0 y $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$
4. Si h es derivable en $y_0 = f(x_0)$ entonces $h \circ f$ es derivable en x_0 y $(h \circ f)'(x_0) = h'(y_0)f'(x_0)$

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$



Teorema (Teorema de Lagrange)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en (a, b). Existe $a < c < b$ tal que

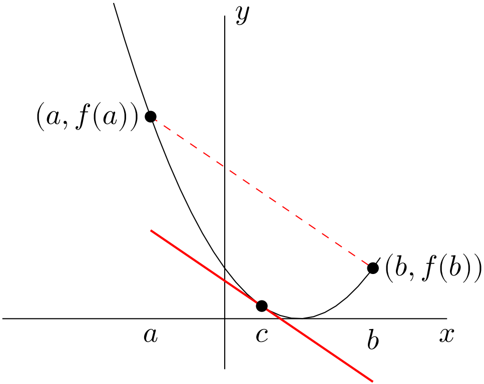
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Nota

El número

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

es la pendiente de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. El teorema nos dice que existe $c \in (a, b)$ de modo tal que la recta tangente al gráfico de f en el punto $(c, f(c))$ es paralela a $\mathbb{L}$



y
$(a, f(a))$
$(b, f(b))$
a
c
b
x

Teorema (Teorema de Cauchy)

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Si $g'(x) \neq 0$, para todo $t \in (a, b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Teorema (Fermat)

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y derivable en (a, b), $c \in (a, b)$ es un máximo o mínimo relativo, entonces $f'(c) = 0$.

La recta tangente

Idea

La condición

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

es equivalente a

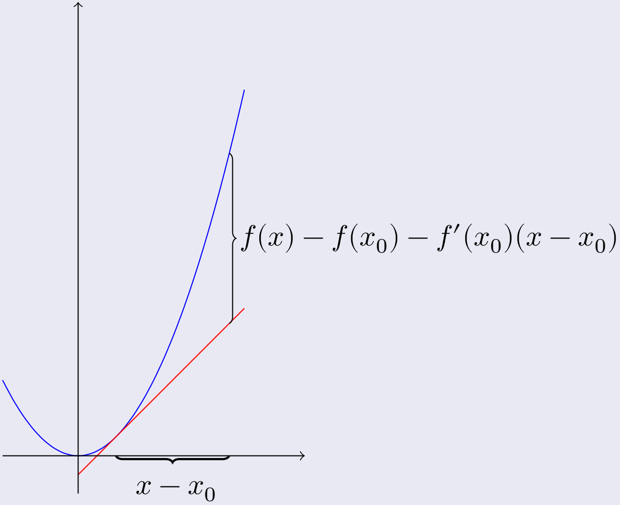
$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

Algebraicamente esto es lo mismo que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} = 0$$

La recta de ecuación $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ es la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$

Interpretación geométrica



Derivadas parciales

Preliminares

Supongamos que tenemos $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donde $\mathcal{U}$ es un conjunto abierto. Escribimos $f(x_1, \dots, x_n)$. Sea $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathcal{U}$ un punto fijo, y sea $1 \leq j \leq n$. Recordemos que el vector $e_j \in \mathbb{R}^n$ tiene un 1 en el lugar j y 0 en los otros lugares.

Definición

La derivada parcial de la función f con respecto a la variable x_j en el punto c es

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(c_1, \dots, c_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + he_j) - f(c)}{h}$$

cuando este límite existe.

La situación en 2 variables

Preliminares

Cuando tenemos 2 variables normalmente se escribe (x, y) en lugar de (x_1, x_2). Sea $c = (c_1, c_2)$. Vamos a tener dos derivadas parciales.

Derivada con respecto a x

Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(c_1, c_2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c + he_1) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1 + h, c_2) - f(c_1, c_2)}{h} \end{aligned}$$

Derivada con respecto a y

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(c_1, c_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + he_2) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1, c_2 + h) - f(c_1, c_2)}{h}$$

Como calcular las derivadas parciales

Supongamos que $f(x, y) = \cos(xy) + x^3y^2$ y que $c = (1, 2)$. Si queremos calcular la derivada parcial de f con respecto a x en c hacemos lo siguiente: Sea $k(x) = f(x, 2) = \cos(2x) + 4x^3$, notemos que k es una función de <u>una</u> sola variable. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = k'(1) = -2\,\mathrm{sen}(2) + 12$$

Continuación

Si queremos calcular la derivada parcial de f con respecto a y en c hacemos lo siguiente: Sea $g(y) = f(1, y) = \cos(y) + y^2$, notemos que g es una función de una sola variable. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = g'(2) = -\operatorname{sen}(2) + 4$$

Nota

Normalmente para calcular las derivadas parciales se considera a las otras vaiables como si fueran constantes y se deriva como en el caso de una variable.

La situación en 3 variables

Preliminares

Cuando tenemos 3 variables normalmente se escribe (x, y, z) en lugar de (x_1, x_2, x_3). Sea $c = (c_1, c_2, c_3)$. Vamos a tener tres derivadas parciales.

Derivada con respecto a x

Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(c_1, c_2, c_3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c + he_1) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c_1 + h, c_2, c_3) - f(c_1, c_2, c_3)}{h}\end{aligned}$$

Derivada con respecto a y

Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(c_1, c_2, c_3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+he_2)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c_1, c_2+h, c_3)-f(c_1, c_2, c_3)}{h}\end{aligned}$$

Derivada con respecto a z

Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(c_1, c_2, c_3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+he_3)-f(c)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c_1, c_2, c_3+h)-f(c_1, c_2, c_3)}{h}\end{aligned}$$

Derivadas parciales como funciones

Idea

Cuando uno tiene una función de una variable $h(x)$ se puede (si existe) calcular la derivada en un punto, que es un número, o se puede definir una nueva función que se llama la función derivada. Por ejemplo si $h(x) = \operatorname{sen}(x)$ podemos calcular $h'(1) = \cos(1)$ o tenemos la función derivada que es $h'(x) = \cos(x)$. Podemos hacer lo mismo con derivadas parciales.

Ejemplo 1

Supongamos que $f(x,y) = \cos(xy) + x^3y^2$. Entonces tenemos dos funciones. La función derivada parcial de f con respecto a x se obtiene considerando a y como una constante y derivando con respecto a x como si se estuviera en una variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\operatorname{sen}(xy) + 3x^2y^2$$

Propiedades de las derivadas parciales

Nota

Las derivadas parciales tienen las mismas propiedades que la derivada común.

Definición (El gradiente)

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Supongamos que en un punto $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}$ existen todas las derivadas parciales. En ese caso el gradiente de f en $\mathbf{v}_0$ es el vector

$$\nabla f(\mathbf{v}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{v}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{v}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{v}_0) \right)$$

Ejemplo

Supongamos que $f(x, y) = \cos(xy) + x^3 y^2$, entonces

$$\nabla f(x_0, y_0) = (-y_0 \operatorname{sen}(x_0 y_0) + 3x_0^2 y_0^2, -x_0 \operatorname{sen}(x_0 y_0) + 2x_0^3 y_0)$$

Propiedades del gradiente

Sean $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Supongamos que en un punto $\mathbf{v}_0$ existen $\nabla f(\mathbf{v}_0)$, y $\nabla g(\mathbf{v}_0)$, entonces

1. $\nabla(f \pm g)(\mathbf{v}_0) = \nabla f(\mathbf{v}_0) \pm \nabla g(\mathbf{v}_0)$
2. $\nabla fg(\mathbf{v}_0) = g(\mathbf{v}_0)\nabla f(\mathbf{v}_0) + f(\mathbf{v}_0)\nabla g(\mathbf{v}_0)$

Definición

Una función $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}$ si

$$\lim_{\mathbf{v} \to \mathbf{v}_0} \frac{f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}_0) - \nabla f(\mathbf{v}_0) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)}{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|} = 0$$

Nota

Cuando $n = 2$ tenemos un plano de ecuación

$$\begin{aligned} z &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + f(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

La definición nos dice que f es diferenciable en (x_0, y_0) si la distancia entre el plano y el gráfico de f decrece más rápido que la distancia entre (x, y) y (x_0, y_0). En ese caso el plano se llama el plano tangente al gráfico de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

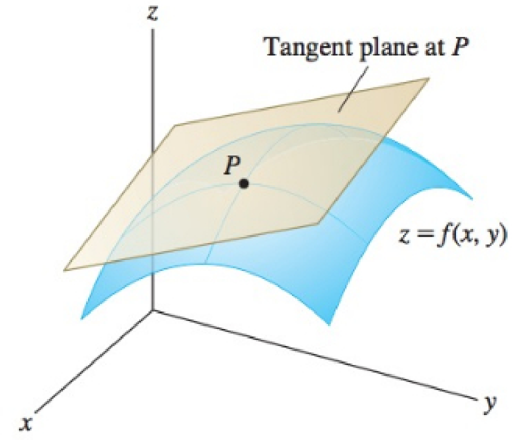


Figura: Plano tangente

Funciones de clase $\mathcal{C}^1$

Como saber si una función es diferenciable

No es fácil saber si una función es diferenciable. No alcanza con ver que el gradiente existe. En la práctica se usa una condición más fuerte.

Definición

Una función $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ si existen todas las derivadas parciales de f y son continuas.

Teorema

Sea $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$, entonces f es diferenciable en todos los puntos de $\mathcal{U}$