Subconjuntos del plano y el espacio

Jorge A. Devoto

23 de octubre de 2020

Bolas abiertas y cerradas en $\mathbb{R}^n$

Definición

Sea $\mathbf{v}_0$ un vector fijo en $\mathbb{R}^n$ y sea $r > 0$. La bola abierta de centro $\mathbf{v}_0$ y radio r es el conjunto

$$B_r(\mathbf{v}_0) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| < r\}$$

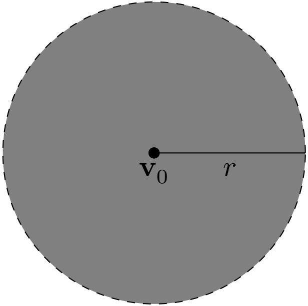
La bola cerrada de centro $\mathbf{v}_0$ y radio r es el conjunto

$$\overline{B_r(\mathbf{v}_0)} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\| \leq r\}$$

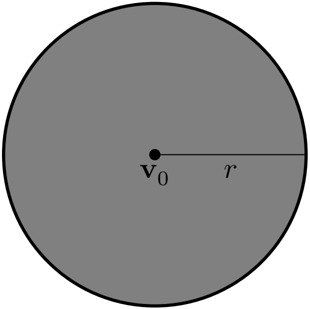
Nota

Cuando $n = 1$ vale que $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$.

Bola abierta y cerrada en el plano

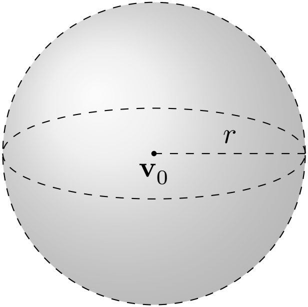


Bola abierta



Bola cerrada

Bola abierta en $\mathbb{R}^3$



Conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$

Definición

Un conjunto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si para todo $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{U}$ existe $r > 0$ (que depende de $\mathbf{v}_0$) tal que $B_r(\mathbf{v}_0) \subset \mathcal{U}$

Ejemplos

Vale que:

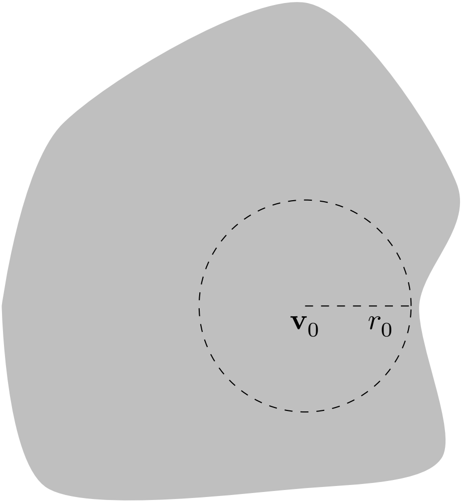
1. El conjunto vacío es abierto
2. Todo $\mathbb{R}^n$ es abierto
3. Las bolas abiertas son abiertos.
4. $\mathcal{U} = \{(x, y) \mid x + y^2 < 1\}$ es abierto.
5. $\mathcal{U} = \{(x, y) \mid x > 0\}$ es abierto.

Propiedades de los conjuntos abiertos

Sea $U_i, i \in I$ una familia de conjuntos abiertos, I un conjunto finito o los naturales. Entonces

1. La unión $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} U_i$ es abierto.
2. Si I es un conjunto finito, por ejemplo $I = \{1, 2, 3, \dots, 550\}$, entonces la intersección $\mathcal{U} = \bigcap_{i \in I} U_i$ es abierto.

Conjunto abierto: interpretación geométrica



Interior de un conjunto

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ el interior $\overset{\circ}{A}$ de A es el conjunto definido por las siguientes condiciones:

1. $\overset{\circ}{A}$ es un conjunto abierto
2. $\overset{\circ}{A} \subset A$
3. Si $\mathcal{U} \subset A$ es un conjunto abierto, entonces $\mathcal{U} \subset \overset{\circ}{A}$

Nota

La idea es que $\overset{\circ}{A}$ es el subconjunto abierto más grande de A. Se puede construir tomando la unión de todos los abiertos que están contenidos en A.

Ejemplo

Si A es abierto, entonces $A = \overset{\circ}{A}$.

Ejemplo

Si $A = \{(x, y) \mid x + y^2 \leq 1\}$, entonces $\overset{\circ}{A} = \{(x, y) \mid x + y^2 < 1\}$

Ejemplo

Si $A = \{(x, y) \mid y = 0\}$, entonces $\overset{\circ}{A} = \emptyset$

Propiedades

Si A yB son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces:

1. Si $A \subset B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$
2. $\overset{\circ}{(A \cap B)} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
3. $\overset{\circ}{(\overset{\circ}{A})} = \overset{\circ}{A}$

Conjuntos cerrados

Definición

Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si su complemento

$$C^c = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \notin C\}$$

es abierto.

Ejemplos

Vale que

1. El conjunto vacío es cerrado
2. Todo $\mathbb{R}^n$ es cerrado.
3. $\{(x, 0), x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ es cerrado
4. Las bolas cerradas son conjuntos cerrados.

Clausura de un conjunto

Definición

Sea C un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. La clausura $\overline{C}$ de C es un conjunto definido por las siguientes condiciones:

1. $C \subset \overline{C}$
2. $\overline{C}$ es cerrado.
3. Si K es cerrado y $C \subset K$, entonces $\overline{C} \subset K$.

Construcción de la clausura

Si C es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, sea $B = C^c$. Entonces $\overline{C} = \left(B^\circ\right)^c$.

Nota

Vale que C es cerrado sii $C = \overline{C}$

Borde de un conjunto

Definición

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$. El borde $\operatorname{bd} C$de C está definido por

$$\operatorname{bd} C = \overline{C} \cap \overline{C^c}$$

Ejemplos

Vale que

1. Si $C = \{x^2 + y^2 < 1\}$ entonces $\operatorname{bd} C = \{x^2 + y^2 = 1\}$
2. $\operatorname{bd} \emptyset = \emptyset$

Propiedades

Vale que

1. $\operatorname{bd} C$ es un conjunto cerrado.
2. $\operatorname{bd} C = \operatorname{bd} C^c$
3. $\operatorname{bd} C^\circ \subset \operatorname{bd} C$ y $\operatorname{bd} \overline{C} \subset \operatorname{bd} C$
4. C es cerrado sii $\operatorname{bd} C \subset C$
5. C es abierto sii $\operatorname{bd} C \cap C = \emptyset$
6. $\overline{C} = C \cup \operatorname{bd} C$

Conjuntos acotados

Definición

Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $\|\mathbf{v}\| < K$ para todo $\mathbf{v} \in C$

Ejemplos

1. $C = \{(x, y) \mid -1 < x < -5,\ 0 < y < 7\}$ es acotado.
2. $C = \{(x, y) \mid -1 < x < -5\}$ NO es acotado.
3. Una intersección de conjuntos acotados es un conjunto acotado
4. Una unión finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado.
5. Si C es un conjunto acotado, entonces C° y $\overline{C}$ son conjuntos acotados.

Conjuntos compactos

Definición

Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si es cerrado y acotado.

Ejemplos

1. $C = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq -5,\ 0 \leq y \leq 7\}$ es compacto.
2. $C = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq -5\}$ NO es compacto.
3. Una intersección de conjuntos compactos es un conjunto compacto
4. Una unión finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
5. Si C es un conjunto acotado, entonces $\overline{C}$ es un conjunto compacto.