Primeros pasos por la aritmética

Alejandra Mercedes Martínez

"Dios hizo los naturales; el resto es obra del hombre"
Leopold Kronecker

El siguiente apunte tiene como objetivo aportar los contenidos teóricos suficientes como para lograr un refuerzo en temas básicos de cálculos aritméticos, como así también brindar una gran cantidad de ejercicios para su ejercitación.

Los números

Existen diferentes conjuntos numéricos. Los más conocidos son:

- $\mathbb{N}$: el conjunto de los números *naturales*. Este conjunto está formado por lo números $1, 2, 3, 4, ...$ Es un conjunto infinito y que no contiene al número 0.
- $\mathbb{N}_0$: el conjunto de los números naturales con el 0 incluido, es decir, el conjunto formado por los números $0, 1, 2, 3, 4, ...$
- $\mathbb{Z}$: el conjunto de los números *enteros*. Este conjunto está formado por los números ..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... Es decir, contiene a los números naturales y al 0 pero tiene además algunos números negativos.
- $\mathbb{Q}$: el conjunto de los números *racionales*. Este conjunto está formado por todos los números que se obtiene como división de dos números enteros (sin que sea el 0 el número por el que se divide). Es decir, contiene a números como el $0.\hat{3}$, -8.5, 0, 45, $-3.45\hat{72}$, etc.
  Observación: los números con periodicidad, es decir, con ˆ se obtienen a partir de la división de dos números enteros. Por ejemplo, $4/3 = 1.\hat{3}$ o $-5/9 = -0.\hat{5}$. Este conjunto contiene a los números enteros dado que todo número entero se puede escribir como ese número dividido el número 1. Por ejemplo, $4 = 4/1$ o $-235 = -235/1$.
- $\mathbb{R}$: el conjunto de los números *reales*. Este cojunto está formado por todos los números mencionados anteriormente junto con todos los otros restantes números que no se pueden escribir como división de dos número enteros. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \pi &= 3.141592653589793... \\ \sqrt{2} &= 1.414213562373095... \\ e &= 2.718281828459045... \end{aligned}$$

  entre otros.

Observación: en matemática solemos usar los puntos suspensivos para indicar que algo continúa por muchas veces más o incluso infinitamente, ya sea de una manera conocida como desconocida.

Una manera de indicar que un número pertenece o no pertenece a un conjunto dado es con el símbolo $\in$ y $\notin$, respectivamente. Por ejemplo, $2 \in \mathbb{N}$ pero $0.5 \notin \mathbb{N}$ o bien $\pi \in \mathbb{R}$ pero $\pi \notin \mathbb{Q}$. ¿Se animan a determinar ustedes si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas?

Ejercicio: Determinar si las siguientes expresiones son *verdaderas* (**V**) o *falsas* (**F**):

1.	$3 \in \mathbb{N}$	2.	$4.5 \in \mathbb{R}$
3.	$e \in \mathbb{N}$	4.	$4.\widehat{9} \in \mathbb{Q}$
5.	$e \notin \mathbb{N}_0$	6.	$\sqrt{3} \notin \mathbb{R}$
7.	$0 \notin \mathbb{N}$	8.	$\sqrt{7} \in \mathbb{N}$

¿Puntos en lugar de comas?

Cuando somos chicos nos enseñan que los números con decimales llevan "comas"para separar la parte entera de la parte decimal. Por ejemplo, algunos números con decimales son: el $3,4$, el $-1,\widehat{7}$ y el $25,3\widehat{45}$. Aunque lo aprendido es correcto, existen varias maneras de indicar el cambio entre la parte entera y la parte decimal. Si bien tanto en Argentina como en Alemania, Brasil, Italia, etc. se usa la "coma", en otros países como Australia, Estados Unidos, Filipinas, India, etc. usan el "punto". En la actualidad, la escritura en computadoras nos ha llevado muchas veces a tener que reemplazar con "puntos" las "comas" de los números con decimales. Como ejemplo, observemos lo siguiente: supongamos que queremos escribir los siguientes cinco números, uno tras otro,

$$3, 4, 5, 21, 9, -3, 0\hat{1}, -14, 78$$

¿Qué ven? Es claro que, en este caso, usar comas para separar los números confunde. Es por ello que, en algunas ocasiones, usaremos los puntos en lugar de comas. Volviendo al ejemplo, si usamos puntos, los cinco números son claramente identificables dado que nos queda

$$3.4, 5, 21.9, -3.0\hat{1}, -14.78$$

Sumas y Restas

Las primeras dos operaciones que uno puede hacer con números reales es sumarlos o restarlos. Por ejemplo, $3-4$ que es igual a -1 y $-5+8$ que es igual a 3.

El único cuidado que hay que tener es cuando la suma o resta está seguida de un número con su signo dado que las combinaciones $++$, $+-$, $-+$ o $--$ no existen. Por ejemplo, $3++2$, $4--2$, $-5+-2$ o $-6-+9$ no existen. Si el cálculo que se quiere hacer es "al número 3 sumarle 3", entonces la cuenta es $3+3$. Si al número 4 se le quiere restar el número negativo -2, lo correcto es usar paréntesis para separar los signos de la siguiente manera: $4-(-2)$, y su resultado es 6. Si al número -6 se le quiere restar el número positivo 9, entonces lo correcto es hacer $-6-9$, y su resultado es -15. Si lo que se quiere es enfatizar el signo $+$ que le correspondería al número 9, lo correcto es usar paréntesis y hacer $-6-(+9)$, que también es -15.

Una relación importante que hay entre la suma y la resta y que podría servirnos en algunos cálculos es que restar un número positivo es exactamente igual que sumar un número negativo. Por ejemplo, si quiero "al 3 restarle 2"esto sería hacer $3-2$, que es lo mismo que "al 3 sumarle el número negativo -2", o sea, $3-2=3+(-2)$. Otro ejemplo sería $-1-8=-1+(-8)$.

Ejercicio: Determinar si las siguientes expresiones son *correctas* (**C**) o *incorrectas* (**I**) y realizar el cálculo para aquellas expresiones que son *correctas*:

1.	$-1++2$	2.	$-3+2$
3.	$1+(-1)$	4.	$5--5$
5.	$-5-+5$	6.	$3+4-(-7)$
7.	$3+(1)$	8.	$2+(+3)$

Propiedad asociativa de la suma

La propiedad asociativa de la suma dice que el modo de agrupar los sumandos no varía el resultado. En general, matemáticamente, esto se escribe como

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

donde a, b y c son números reales. Por ejemplo,

$$(-3+2)+4=-3+(2+4)$$

¿Quiénes son a, b y c en este caso? $a=-3$, $b=2$ y $c=4$. Haciendo las cuentas tenemos que

$$\begin{aligned}(-3+2)+4 &= (-1)+4=-1+4=3\\ -3+(2+4) &= -3+6=3\end{aligned}$$

que, efectivamente, son iguales.

Multiplicación y División

Notación: el signo de multiplicación puede escribirse de varias maneras: "$\times$", ". "o bien ""(es decir, sin nada). El símbolo $\times$ no se usa cuando se hacen cuentas más avanzadas dado que puede confundirse con la letra x (que se usa, por ejemplo, al resolver ecuaciones). En este apunte, podría aparecer las tres maneras de escribirse las multiplicaciones de manera indistinta. El símbolo "."se puede usar siempre sin problemas. En algunas ocasiones, cuando se multiplican números entre paréntesis o números positivos con cuentas entre paréntesis, el símbolo de multiplicación puede obviarse. Por ejemplo, $3.(2-5)=3(2-5)$ y $(2-1).(4+3)=(2-1)(4+3)$.

Notación: El signo de división puede escribirse como ":", "/"o como fracción poniendo un número debajo de otro "-". Por ejemplo, $4:2$, $4/2$ y $\frac{4}{2}$ representan la misma cuenta.

Importante: en matemática nunca se puede escribir una mutiplicación o una división seguido de un signo $-$ o de un signo $+$. Para escribir dicha multiplicación o división es necesario poner un paréntesis (o llave o corchete) que separe la multiplicación del signo. Por ejemplo, escribir $3.-1$ o

$4 : +2$ es incorrecto. Lo correcto sería escribir $3.(-1)$ y $4 : (+2)$. Para la división, no se puede poner un signo $+$ o $-$ a continuación del símbolo de división ":"o "/". Por ejemplo, $3 : +4$ o $-4/-2$ están mal escritos, lo correcto sería escribir $3 : (+4)$ o $-4/(-2)$. Sí se puede cuando lo que se tiene es una fracción. Por ejemplo, $\dfrac{4}{-2}$ o $\dfrac{-5}{-3}$ sí son correctos.

Ejercicio: Determinar si las siguientes expresiones son *correctas* (**C**) o *incorrectas* (**I**):

1.	$3 : -2$	2.	$4/3$
3.	$-4 : +3$	4.	$-4/(-2)$
5.	$\dfrac{7}{3}$	6.	$\dfrac{-5}{-10}$
7.	$(-3)/-2$	8.	$(-2) : (+4)$

Una relación importante que hay entre la multiplicación y la división que podría ayudarnos mucho en algunos cálculos es que la división de un número es como una multiplicación del número inverso. Por ejemplo, hacer $3 : 4$ es igual que multiplicar 3 por $\dfrac{1}{4}$, o sea, $3.\dfrac{1}{4}$. Otro ejemplo sería $-5/8 = -5.\dfrac{1}{8}$.

Ejercicio: Reescribir las siguientes divisiones como mutiplicaciones. Hacemos el primero a modo de ejemplo.

0.	$-3/4 = -3\,.\,\dfrac{1}{4}$	1.	$7/9$
2.	$-3 : 5$	3.	$0.5/2$
4.	$-3.9 : 10$	5.	$0.1/4$

Propiedad asociativa de la multiplicación

Esta es la famosa propiedad "el orden de los factores no altera el producto". Matemáticamente, la forma de expresarlo sería

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

donde a, b y c son números reales. Por ejemplo,

$$(2.3).4 = 2.(3.4)$$

¿Quiénes son a, b y c en este caso? $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$. Haciendo las cuentas tenemos que

$$\begin{aligned}(2.3).4 &= 6.4 = 24\\ 2.(3.4) &= 2.12 = 24\end{aligned}$$

que, efectivamente, son iguales.

Los paréntesis

Los paréntesis, llaves y corchetes son la herramienta matemática que nos permite separar números o cálculos del resto de los elementos que componen la fórmula o cuenta. Nos sugieren, de alguna manera, el orden en el que se deberían realizar los cálculos. Por ejemplo, si tenemos

$$(5-4)+3$$

esto nos dicaría que primero debemos realizar la operación $5-4$ que es igual a 1 y, a ese resultado, sumarle 3, es decir,

$$(5-4)+3=1+3=4$$

Los paréntesis (o llaves o corchetes) pueden "sobrar"pero nunca faltar. En el caso de que falten, las cuentas no podrán realizarse o no serán las que queremos realizar. Por ejemplo,

$$\{[(3+2)+1]+9\}-1=3+2+1+9-1=14$$

es un ejemplo en el que todos los paréntesis, corchetes y llaves están de más. Sin embargo, toda la expresión de arriba es matemáticamente correcta. Observemos además que, en este caso, no hay ninguna multiplicación. Cuando hay multiplicaciones hay que tener un mayor cuidado con los paréntesis (cuando lo que se encuentra adentro de un paréntesis es un número negativo o hay más de un número). Por ejemplo,

$$(3.(4-1)-2)+1=3.(4-1)-2+1=8$$

Sin embargo, si sacábamos el paréntesis que quedó, nos daba

$$3.4-1+2-1=12$$

y, por lo tanto, hubiésemos estado cometiendo un error.

¿Qué ocurre con los números decimales y las multiplicaciones? Un comentario que podría hacerse es que una cuenta como la anterior (la cuenta $3.4-1+2-1$) podría estar indicando que el 3.4 es el número decimal $3,4$ y no la multiplicación del 3 con el 4 (que es a lo que se refería en realidad). Y es cierto. Sin embargo, el contexto es el que determinará a qué se refiere 3.4 exactamente.

Ejercicio: Eliminar todos los paréntesis, corchetes o llaves que están "de más", es decir, que su eliminación no modifica el ejercicio original. Hacemos el primero a modo de ejemplo.

0. $\{1\}+[2-3(3-4)+1]-5=1+2-3(3-4)+1-5$
1. $\{[2+(3-1)]-1\}$
2. $[(2)]-1+3\,.\,[(5)]$
3. $\{3+[(+1)-4]\}$
4. $[-1]+\{3\}-2(3-1)$
5. $\{2[(-1)+4]\}$
6. $\{2+(1)\}+[3+(+7)]$
7. $([9+3])+(1+4)$

Signos

En matemática, cualquier número real que sea distinto de 0 puede ser: positivo (o sea, mayor a 0) o negativo (menor a 0). Por ejemplo: $1.2, \pi$ y 20100 son números positivos, mientras que $-0.3, -\pi$ y -2012 son números negativos.

Los números reales se pueden representar en la recta numérica como puntos. Por ejemplo, los números 0.3, -1.5 y 3.4 se verían de la siguiente manera:

Cuando se multiplican o dividen dos números (donde ninguno es 0) el signo del número resultante puede ser positivo o negativo según la famosa *regla de los signos*:

- Si los dos números son positivos, el resultado es un número *positivo*. Por ejemplo: $3 \times 5 = 15$, $63/9 = 7$.
- Si los dos números son negativos, el resultado es un número positivo. Por ejemplo: $-1.(-1) = 1$, $(-3,5).(-2,8) = 9,8$ y $(-9) : (-3) = 3$.
- Si uno de los números es positivo y el otro es negativo, el resultado es un número *negativo*. Por ejemplo $-3 \times 9 = -27$, $2,5\,.\,(-1,4) = -3,5$ y $8 : (-2) = -4$.

Ejercicio: Realizar los siguientes cálculos:

1.	$4.(-1)$	2.	$(-3) \times (-5)$
3.	$(-6) : 3$	4.	$6/(-3)$
5.	$10\,.\,0,5$	6.	$10 : (-0,5)$
7.	$4.9 \times (-3)$	8.	$-15 : -3$

Fracciones

Una fracción es la expresión de una cantidad dividida otra cantidad. La cantidad que se encuentra del lado inferior de la línea horizontal se la llama *denominador*, mientras que la cantidad que se encuentra del lado superior de la línea se la llama *numerador*.

Las fracciones pueden ser números positivos si las dos cantidades que se dividen tienen el mismo signo. Por ejemplo, si dividimos por 3 el número 2, se tiene $\frac{2}{3}$. Si dividimos el número -15 por el número -7, se tiene $\frac{-15}{-7}$. Sin embargo, por la regla de los signos, esto es lo mismo que la fracción $\frac{15}{7}$.

De manera similar, la fracción será un número negativo si las dos cantidades que se dividen tienen signos opuestos. Por ejemplo, si dividimos el número -5 por el número 4, se tiene $\dfrac{-5}{4}$. Si dividimos el número 5 por el número -4, se tiene $\dfrac{5}{-4}$. En ambos casos, las dos fracciones son iguales a la fracción $-\dfrac{5}{4}$.

Por cierto... ¿Se puede dividir por 0? La respuesta es *no*. Nunca. Lo que sí se puede hacer es dividir al 0 por un número que, justamente, no sea 0. En todos los casos, el número resultante va a ser 0. Por ejemplo, $0/4 = \dfrac{0}{4} = 0$ o bien $0/(-1.3) = \dfrac{0}{-1.3} = 0$. Sin embargo, las expresiones $3/0$ o $0/0$ son incorrectas.

Suma y resta de fracciones

Hay varias maneras para sumar fracciones. En este apunte sólo explicaremos una de estas maneras. Comencemos viendo cómo sumar dos fracciones. Por ejemplo, supongamos que queremos sumar

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{7}$$

Lo primero que debemos hacer es hallar lo que se llama un *denominador común.* El denominador común es un número que se puede dividir (y dar un número entero) por los denominadores de las dos fracciones involucradas. Una manera rápida y sencilla de hallar un denominador común consiste en multiplicar los denominadores de las dos fracciones involucradas. En este ejemplo, un denominador común es $3.7 = 21$. Usaremos este denominador.

Una vez que hallamos un denominador común, comenzamos a armar la fracción resultante de la siguiente manera

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{\qquad\qquad}{21}$$

Observemos que la línea horizontal que escribí es bien larga. La razón de esto es que voy a tener que escribir cálculos en el numerador de esa fracción.

Luego, en el numerador vamos a tener que escribir los cálculos que necesitamos para hallar el denominador. El procedimiento es el siguiente:

1. Al numerador de la fracción resultante le agrego el signo que tiene la primera de las fracciones. En nuestro ejemplo
$$\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{+\qquad\qquad}{21}$$
2. Agarro el denominador común hallado y lo dividio por el denominador de la primera fracción. En nuestro caso sería: $21/3 = 7$.
3. A ese resultado lo *multiplico* por el numerador de la fracción. Luego, en nuestro caso nos queda $7.2 = 14$. El resultado de esa operación lo agregamos al numerador de la fracción respuesta de la siguiente manera
$$\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{+14\qquad\qquad}{21}$$
Observemos que el signo del número es el signo que pusimos en el paso 1.

4. Luego, agregamos el signo de la cuenta (suma o resta) que deseamos hacer. En nuestro caso estamos con un suma y por lo tanto ponemos un signo + de la siguiente manera:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{+14+\qquad}{21}$$

5. Repetimos los pasos 1 y 2. Es decir, calculamos $21/7 = 3$. Luego, multiplicamos el resultado por el numerador de la fracción, es decir, $3.4 = 12$ y a este resultado lo agregamos al denominador de la fracción resultante de la siguiente manera:

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{+14+12}{21}$$

6. Realizamos el cálculo final, sumando lo que haya quedado en el numerador. En nuestro caso,

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}=\frac{26}{21}$$

Si tenemos más fracciones el procedimiento se repite hasta recorrer todas las fracciones involucradas. Por ejemplo, realicemos el siguiente cálculo:

$$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{2}$$

Lo primero que debemos hacer es hallar un *denominador común*. Nuevamente, un denominador común posible es el que se obtiene de multiplicar los tres denominadores comunes de las fracciones, es decir, $3.3.2 = 18$. Sin embargo, cuando algunos de los denominadores está repetido, *no* hace falta repetirlo todas las veces que aparezca, con una sola vez alcanza. Es decir, otro denominador común que podríamos usar es el que se consigue multiplicando 3 por 2, es decir, 6. En esta oportunidad usaremos el 6 como denominador común. Siguiendo con los pasos indicados anteriormente, lo que debemos hacer es

$$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=\frac{\qquad}{6}$$

Luego, ponemos el signo de la primera fracción

$$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=\frac{-\qquad}{6}$$

Ahora, hacemos el cálculo de dividir el denominador común por el denominador de la primera fracción, es decir, $6/3 = 2$ y a ese número lo multiplicamos por el numerador de esa fracción, es decir, $2.1 = 2$. A este resultado lo ponemos en el denominador de la fracción resultante de la siguiente manera

$$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=\frac{-2\qquad}{6}$$

Ahora agregamos el signo del siguiente cálculo que queremos realizar, que es sumar la fracción $\frac{5}{3}$

$$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=\frac{-2+\qquad}{6}$$

Repetimos el procedimiento: dividimos 6 por 3 que da 2 y lo multiplicamos por 5 (el numerador), dando un total de 10. Luego, lo agregamos en el cálculo de la siguiente manera

$$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=\frac{-2+10}{6}$$

Por último, agregamos el signo para el último cálculo

$$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=\frac{-2+10-}{6}$$

y realizamos el mismo procedimiento: agarramos el denominador común 6, lo dividimos por 2. Al resultado (que es 3) lo multiplicamos por el numerador de la fracción que es 5, dando como resultado el número 15. Lo agregamos en la fracción

$$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=\frac{-2+10-15}{6}$$

y calculamos la cuenta que falta que es: $-2+10-15=-7$. Luego, esto dice que

$$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}-\frac{5}{2}=-\frac{7}{6}$$

con lo cual damos por finalizado el cálculo.

¿Y cómo hacemos para sumar una fracción con un número entero? Bueno, hacemos lo mismo, pero escribimos el número entero como la fracción que tiene a ese número en el numerador y al 1 en el denominador. Por ejemplo, si queremos hacer

$$2+\frac{2}{3}$$

debemos escribir al 2 como $\dfrac{2}{1}$ y entonces

$$2+\frac{2}{3}=\frac{2}{1}+\frac{2}{3}$$

y procedemos de la misma manera que antes. Tomamos al 3×1, es decir, al 3, como denominador común, entonces ya sabemos que

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{3}=\frac{\quad}{3}$$

Luego, agregamos el signo de la primera fracción (que es el signo de +) y dividimos el denominador común (3) por el denominador de la primera fracción, es decir, hacemos $3/1=3$ y luego lo mutiplicamos por el numerador que es 2, obteniendo 6 de resultado. Luego, colocamos ese resultado junto con su signo en el numerador de la fracción resultante de la siguiente manera

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{3}=\frac{+6}{3}$$

Luego, repetimos el procedimiento con la siguiente fracción: agregamos el signo de la fracción (que también es +), dividimos 3 por el denominador de la fracción (3) y al resultado (que es un 1) lo multiplicamos por el numerador que es 2 obteniendo un 2. Luego, completamos el numerador de la fracción resultante con esta información de la siguiente manera

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{3}=\frac{+6+2}{3}$$

y hacemos un último cálculo (la cuenta del numerador) para hallar la fracción resultante

$$\frac{2}{1}+\frac{2}{3}=\frac{+6+2}{3}=\frac{8}{3}$$

Ejercicio: Realizar los siguientes cálculos:

1. $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}$
2. $-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}$
3. $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$
4. $-\frac{2}{3}+2-\frac{4}{7}$
5. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$
6. $\frac{5}{2}-\frac{10}{3}-\frac{3}{2}$
7. $-2+\frac{2}{9}$
8. $2+\frac{7}{2}-1$

Multiplicación y división de fracciones

La multiplicación de fracciones es una operación muy sencilla. Cuando tenemos que multiplicar dos fracciones, la fracción resultante se obtiene multiplicando numerador con numerador y ubicando el resultado en el numerador de la fracción resultante, y denominador con denominador, ubicando el resultado en el denominador de la fracción resultante. Por ejemplo

$$\frac{2}{3}.\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$$

pues $2.5=10$ y $3.7=21$.

Cuando lo que se quiere es dividir fracciones, hay dos manera diferentes de pensarlo:

1. Usando el producto cruzado. Supongamos que queremos hacer la siguiente división

   $$\frac{2}{3}:\frac{5}{7}$$

   Usando la técnica del producto cruzado, lo que se haría es agarrar el *numerador* de la primera fracción, multiplicarlo por el *denominador* de la segunda fracción y poner el resultado en el *numerador* de la fracción resultante.

   $$\frac{2}{} \searrow \times \frac{}{7} \nearrow = \frac{14}{}$$

   Además, para obtener el denominador de la fracción resultante lo que se debe hacer es agarrar el *denominador* de la primera fracción, multiplicarle el *numerador* de la segunda fracción y poner el resultado en el *denominador* de la fracción resulante. Es decir,

   $$\frac{}{3} \nearrow \times \frac{5}{} \searrow = \frac{}{15}$$

Uniendo el numerador y el denominador de la fracción resultante tenemos que

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{15}$$

2. Convirtiendo la división en una multiplicación. Para hacer esto, la fracción que está diviendo se reescribe multiplicando la fracción "dada vuelta", es decir, pasando el numerador al denominador y viceversa. De esta manera, convertimos un problema de división en un problema de multiplicación que ya sabemos resolver. Para el caso del ejemplo, la fracción que habría que dar vuelta por ser la que está diviendo es $\frac{5}{7}$ que, al darse vuelta pasa a ser $\frac{7}{5}$. De esta manera, el cálculo se realiza sencillamente de la siguiente manera

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} . \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

Ejercicio: Realizar los siguientes cálculos:

1.	$\frac{11}{2} . \frac{3}{13}$	2.	$\frac{3}{4} : \frac{2}{7}$
3.	$\frac{1}{2} . \left(-\frac{3}{2}\right)$	4.	$\left(-\frac{7}{8}\right) : \left(\frac{2}{3}\right)$
5.	$-\frac{7}{5} \times \frac{9}{2}$	6.	$\frac{1}{3} : \left(-\frac{5}{4}\right)$
7.	$\frac{1}{2} . \frac{4}{3}$	8.	$-\frac{2}{5} : \frac{5}{2}$

Simplificación de fracciones

La simplificación de fracciones se hace cuando el numerador y el denominador poseen números en común, es decir, son ambos divisibles por un mismo número. Veamos un ejemplo: supongamos que queremos simplificar la siguiente fracción

$$\frac{42}{30}$$

Nos preguntamos: ¿Hay algún número por el que podamos dividir 42 y 30 y que su resultado sea entero? La respuesta es sí. Un número por el que ambos se pueden dividir por ser pares es el número 2. Si dividimos 42 y 30 por el número 2 obtenemos 21 y 15 respectivamente. Luego, la fracción $\frac{42}{30}$ y la fracción $\frac{21}{15}$ son fracciones equivalentes, es decir, representan el mismo número. Luego, obtuvimos la siguiente simplificación

$$\frac{42}{30} = \frac{21}{15}$$

Pregunta: ¿Listo o podemos seguir dividiendo el numerador y el denominador? La respuesta es que podemos seguir dividiendo, en esta oportunidad por el número 3. Si a 21 y a 15 los dividimos por el número 3 obtenemos 7 y 5 respectivamente. Luego, tenemos que

$$\frac{42}{30} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

En otras palabras, simplificamos la fracción $\frac{42}{30}$ en $\frac{7}{5}$. Es decir, la fracción quedó simplificada en

$$\frac{7}{5}$$

<u>Ejercicio</u>: Simplificar las siguientes fracciones:

1.	$\frac{182}{10}$	2.	$\frac{30}{60}$
3.	$\frac{42}{70}$	4.	$\frac{45}{105}$
5.	$\frac{21}{7}$	6.	$\frac{4}{64}$
7.	$\frac{225}{375}$	8.	$\frac{154}{28}$

Potenciaciones

La potenciación es una operación matemática entre dos términos denominados: base (por ejemplo b) y exponente (por ejemplo n).

Cuando el exponente n es un número natural, la operación b^n, que se lee como "b elevado a la n", significa multiplicar a b por él mismo tantas veces como lo indique el exponente n. Por ejemplo, $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (que es igual a 32), o bien $3^2 = 3 \times 3$ (que es igual a 9). Cuando el exponente es un 2, se dice "al cuadrado". Por ejemplo, 3^2 se lee como "3 al cuadrado". Si el exponente es un 3, se dice "al cubo". Por ejemplo, 5^3 se lee como "5 al cubo".

Cuando el exponente es un 0, cualquier número distinto de 0 elevado a la 0 es un 1. Por ejemplo, $3^0 = 1$ y $253^0 = 1$.

En el caso de potenciaciones, el uso de paréntesis es necesario para poder diferenciar dos cuentas diferentes. Por ejemplo

$$(-1)^2 \neq -1^2$$

El término de la izquierda es equivalente a hacer $(-1) \times (-1) = 1$. Por el contrario, el término de la derecha es lo mismo que hacer $-(1 \times 1)$ dado que lo que se está elevando al cuadrado no es el -1 sino que es el 1.

<u>Observación</u>: cuando el exponente es un número natural, toda potenciación es exactamente igual una multiplicación. Por ejemplo, $(3-1)^2 = (3-1)(3-1)$ (que es 4) o $(-4)^3 = (-4)(-4)(-4)$ (que es -64).

Otro ejemplo sería resolver

$$-(-2)^3$$

Para hacer ese cálculo, ¿qué deberíamos resolver primero? La respuesta es "el cubo". O sea, primero debemos hacer $(-2)^3$. Como esto es $(-2) \times (-2) \times (-2)$ el resultado es -8. Es decir, por ahora tenemos que

$$-(-2)^3 = -(-8)$$

Luego, usando la regla de los signos, se tiene que

$$-(-2)^3 = -(-8) = 8$$

Ejercicio: Realizar los siguientes cálculos:

1.	2^3	2.	3^2
3.	$(-5)^2$	4.	$(-1)^5$
5.	-2^3	6.	$-(-3)^4$
7.	$-\left(-\frac{1}{5}\right)^2$	8.	$-\left(\frac{3}{5}\right)^3$

Separación en términos

Cuando un cálculo involucra multiplicaciones o paréntesis, es necesario separar en términos para poder alcanzar el resultado correcto. En general, la separación en términos es un procedimiento que se realiza de "afuera"para "adentro"y que ocurre en las operaciones de sumas y restas. Por ejemplo, si tenemos que realizar el cálculo

$$(3-2)-(5-8)+4$$

la separación en términos se realiza de la siguiente manera:

$$\underbrace{(3-2)}-\underbrace{(5-8)}+\underbrace{4}$$

Luego, habría que realizar dos cálculo antes de proseguir. Deberíamos resolver: $3-2$ y $5-8$. Como $3-2=1$ y $5-8=-3$ reemplazamos en cada término según corresponda de la siguiente manera

$$(1)-(-3)+4$$

¿Qué hacemos ahora con los paréntesis? Los eliminamos teniendo cuidado con los signos, de la siguiente manera:

$$1+3+4$$

¿Hace falta volver a separar en términos? No, porque ya no hay más paréntesis ni multiplicaciones. Luego el resultado es 8.

Otro ejemplo con multiplicaciones sería:

$$3(4-1)-2(7-3)+5(8-10)$$

Luego, si separamos en términos tenemos

$$\underbrace{3(4-1)}-\underbrace{2(7-3)}+\underbrace{5(8-10)}$$

¿Cómo resolvemos cada uno de los términos? Una manera simple consiste en realizar primero los cálculo entre paréntesis y luego la multiplicación. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 3(4-1) &= 3.(3) = 3.3 = 9 \\ 2(7-3) &= 2.(4) = 2.4 = 8 \\ 5(8-10) &= 5.(-2) = -10 \end{aligned}$$

Finalmente, reemplazando en el cálculo original

$$(9) - (8) - (-10) = 9 - 8 + 10 = 11$$

Observación: cuando separamos en términos, si los signos de $+$ y $-$ quedan afuera del cálculo, el resultado que se obtiene al resolver el término debe ponerse entre paréntesis.

Un último ejemplo con potenciaciones sería:

$$-2 - 3(2-3)^2 + 2[(4-5)+3]$$

Si separamos en términos tenemos

$$-\underbrace{2} - \underbrace{3(2-3)^2} + \underbrace{2[(4-5)+3]}$$

Resolvemos todos los términos que haya que resolver.

$$\begin{array}{rcl} 3(2-3)^2 & = & 3.(-1)^2 = 3.(-1).(-1) = 3 \\ 2[(4-5)+3] & = & 2[\underbrace{(4-5)} + \underbrace{3}] = 2.[(-1)+3] = 2.[2] = 2.2 = 4 \end{array}$$

Observemos que, en la segunda igualdad, adentro de los corchetes volvimos a separar en términos para realizar el cálculo sin problemas. Finalmente, reemplazando en el ejercicio original, tenemos que

$$-2 - (3) + (4) = -2 - 3 + 4 = -1$$

Ejercicio: Realizar los siguientes cálculos:

1. $2 - 3(5-1) + 7$
2. $-1 - 2(4-7)^2 - 3$
3. $2(3-1) - 4(5-4)^2$
4. $-7(1-2)^2 + 3 - 2(4-6)$
5. $\dfrac{1}{3}(7-1) + 1 - 3\left(\dfrac{5}{3} - 1\right)$
6. $-\dfrac{3}{2}\left(1 - \dfrac{5}{3}\right) + 3\left(-4 - \dfrac{1}{3}\right)$
7. $-\left(3 - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 1$
8. $1 - (3-4)\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}.\left(-\dfrac{2}{9}\right)$

Propiedad distributiva

La propiedad distributiva es una propiedad que relaciona una multiplicación con sumas y restas. En términos matemáticos, la propiedad se escribiría de la siguiente manera:

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

con a, b y c números reales. Sin embargo, como seguramente esto no es del todo claro, veámoslo con algunos ejemplos. Supongamos que queremos aplicar la propiedad sobre el siguiente cálculo

$$2(3-4)$$

En primer lugar observemos que, en este caso, conocemos la respuesta. Como el término que está entre paréntesis es $3-4$ y esto es igual a -1, el resultado se consigue multiplicando el número 2 por el número -1 y, por lo tanto, la respuesta es -2. Sin embargo, nos obligaremos a usar la propiedad distributiva para llegar al resultado (y mostrar cómo se usa la propiedad).

Cuando aplicamos la propiedad distributiva, el número que está multiplicando el término entre paréntesis se distribuye sobre cada término que se encuentra en el paréntesis y que esté sumando o restando. Es decir, en el ejemplo esto sería

$$2(3-4) = 2.3 - 2.4$$

Por último, como esto es lo mismo que $6 - 8 = -2$, obtenemos el resultado final del cálculo.

Observemos algo importante. El número que estaba multiplicando era un número positivo (era el número 2), sin embargo ¿qué hubiese ocurrido si el número era negativo? En ese caso, el signo negativo del número que se encuentra afuera del paréntesis hubiese modificado los signos de todos los términos que se obtenían tras realizar la distributiva. Veamos un nuevo ejemplo. Supongamos que queremos aplicar la propiedad en la siguente cuenta

$$-3(-4+8)$$

En este caso, el número que se encuentra afuera multiplicando el paréntesis es el número -3. Cuando aplicamos la propiedad, el -3 va a multiplicar al número -4 por un lado y va a multiplicar al $+8$ por el otro. De esta manera, usando la regla de que "menos por menos es más"y que "menos por más es menos", tenemos que

$$-3(-4+8) = +3.4 - 3.8$$

Para ver bien esto es conveniente ir mirando el signo del término que vamos a obtener *antes* de escribir la multiplicación. Luego, terminamos de realizar el cálculo resolviendo la cuenta que obtuvimos. De esta manera,

$$-3(-4+8) = +3.4 - 3.8 = 12 - 24 = -12$$

Si bien los dos ejemplos anteriores tenían adentro del paréntesis solamente dos números, la misma propiedad vale con más números. Por ejemplo, si queremos aplicar la propiedad distributiva en

$$3(2-1+4-8)$$

tenemos que

$$3(2-1-4+8) = 3.2 - 3.1 - 3.4 + 3.8 = 6 - 3 - 12 + 24 = 15$$

O bien, si queremos aplicar la propiedad distributiva en

$$-\frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{2}-1-\frac{2}{3}\right)$$

tenemos que

$$-\frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{2}-1-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}\,.\,2 - \frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,.\,1 + \frac{1}{2}\,.\,\frac{2}{3} = -1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{11}{12}$$

Pregunta: ¿La propiedad distributiva vale sólo cuando la mutiplicación se encuentra a la izquierda del paréntesis? La respuesta es no. La misma propiedad vale si lo que se está multiplicando está a la derecha. En términos matemáticos esto sería

$$(b+c).a = b.a + c.a$$

y con un ejemplo

$$(3-2+1).(-3) = -3.3 + 2.3 - 1.3 = -9 + 6 - 3 = -6$$

Otra cuenta podríamos tener es la siguiente

$$-(3-5+7)$$

En este caso, nos interesa sacar el paréntesis y, para ello, hay que tener cuidado con el signo $-$ que se encuentra adelante. El signo $-$ seguido de un paréntesis funciona igual que tener el número -1 multiplicando. Es decir,

$$-(3-5+7) = -1(3-5+7)$$

Entonces, si aplicamos la propiedad distributiva

$$-(3-5+7) = -1(3-5+7) = -1.3 + 1.5 - 1.7 = -3 + 5 - 7$$

Observemos que lo que nos quedó es la cuenta original pero todos los números que se encontraban adentro del paréntesis tienen los signos cambiados:

$$-(3-5+7) = -3 + 5 - 7$$

Luego, hacemos el cálculo y obtenemos que

$$-(3-5+7) = -3 + 5 - 7 = -5$$

Una última pregunta (por ahora): ¿La propiedad distributiva vale cuando hay una división en lugar de una multiplicación? La respuesta es *no*. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular

$$10 : (2+5)$$

La respuesta a esto consiste en calcular el paréntesis primero. Esto es $2+5=7$ y, por lo tanto, la respuesta es $10/7$, es decir, la fracción $\frac{10}{7}$. Sin embargo, si hubiésemos aplicando la propiedad distributiva esto nos hubiese dado

$$10 : (2+5) = 10 : 2 + 10 : 5$$

Como $10 : 2 = 5$ y $10 : 5 = 2$ entonces

$$10 : (2+5) = 10 : 2 + 10 : 5 = 5 + 2 = 7$$

y, claramente 7 no es igual a la fracción $\frac{10}{7}$. Esto ocurre porque la propiedad distributiva no podía aplicarse de la misma manera que se podía aplicar con el producto.

Ejercicio: Aplicar la propiedad distributiva cada vez que sea posible. En todos los casos, obtener el resultado del cálculo pedido y, en caso de ser fracción, obtener la fracción simplificada.

1.	$3(5-2)$	2.	$(-2)(3-1+7)$
3.	$-(4+5-9-1)$	4.	$\frac{1}{2}\left(4-\frac{2}{3}\right)$
5.	$\left(\frac{7}{5}-1\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$	6.	$\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{5}\right):\frac{2}{3}$
7.	$(15-10)/(-5)$	8.	$10:(2+3)$

Cálculos combinados

La idea ahora es aplicar las técnicas aprendidas que les resulten más convenientes para obtener el resultado. No es necesario que apliquen todas las herramientas o alguna herramienta en particular a no ser que así lo requiera el enunciado del ejercicio, por supuesto. Diferentes personas se van a sentir más cómodas con una o otra técnica pero, si esa técnica es aplicada correctamente, el resultado será el correcto. ¡Manos a la obra!

Por ejemplo, hagamos juntos el siguiente cálculo

$$-3.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(5-1)^2-\left(-\frac{1}{3}-2\right)3$$

Primero separamos en términos dejando afuera los signos, es decir,

$$-\underbrace{3.\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{2}(5-1)^2}-\underbrace{\left(-\frac{1}{3}-2\right)3}$$

Luego, los términos serían:

- $3\,.\,\frac{1}{2}$
- $\frac{1}{2}(5-1)^2$
- $\left(-\frac{1}{3}-2\right)3$

Resolvemos cada uno por separado

- $3\,.\,\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$
- En este caso, primero tenemos que resolver la potenciación. Luego, $(5-1)^2=4^2=16$. Entonces, $\frac{1}{2}(5-1)^2=\frac{1}{2}\,.\,16=8$
- Aplicando la propiedad distributiva $\left(-\frac{1}{3}-2\right)3=-\frac{1}{3}\,.\,3-2.3=-\frac{3}{3}-6=-1-6=-7$

Juntando todo y teniendo cuidado con los signos tenemos que

$$-3.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(5-1)^2-\left(-\frac{1}{3}-2\right)3=-\frac{3}{2}+8-(-7)=-\frac{3}{2}+8+7=-\frac{3}{2}+15=\frac{27}{2}$$

Ejercicio: Realizar los siguientes cálculos combinados:

1. $-\frac{3}{2}(-1)^3+5\left(\frac{3}{5}-1\right)-1$
2. $-(-3)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\right]+\left(1-\frac{5}{2}\right)^2$
3. $\left[\frac{5}{2}\left(5-(-3)^2\right)^2\right]/20$
4. $-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}:\frac{5}{3}+\left(-\frac{1}{5}\right)^2$
5. $-\left((-1)^{20}+1\right)^2+3$
6. $-\frac{25}{9}\left(-\frac{3}{5}\right)^3-\frac{7}{2}(4-3)^2+3$
7. $-1(-3)+7(-2)+\frac{5}{2}$
8. $-\left(5-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{3}{5}\right)$