Ejercicios adicionales 1° parcial

Determine la validez o falsedad de las siguientes afirmaciones y justifique con explicaciones claras o con contraejemplos.

1. Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ tal que $Ax = b$ tiene solución única. Si $Ay = Az$ entonces $y = z$.

2. Sean u y $v \in \mathbb{R}^2$ perpendiculares, con $\|u\| = \|v\| = 1$. Entonces $u + v$ es perpendicular a $u - v$.

3. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversible, $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y el sistema $A^{-1}Bx = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ tiene una única solución entonces B es inversible.

4. Si $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ entonces el sistema $BAx = 0$ siempre resulta compatible determinado.

5. Sea A una matriz cuadrada para la cual el sistema $Ax = b$ es compatible determinado, entonces $Ax = 0$ puede ser compatible indeterminado.

6. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible. Entonces el sistema $ABx = 0$ es compatible determinado.

7. Si el sistema
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
es compatible, entonces el sistema
$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$
es compatible.

8. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ inversible entonces $5A + A^2$ es inversible.

9. Si $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 1 & -a+c & -b+d \\ 3 & 2a & 2b \end{pmatrix}$, entonces $\det A = 10$.

10. Sean $\pi_1 : x + y - z = 3$ y $\pi_2 : \lambda(1, 1, -1) + \mu(1, 0, 1)$ dos planos en el espacio. Entonces $d(\pi_1, \pi_2) = \sqrt{3}$.

11. Dados 3 puntos distintos en $\mathbb{R}^{3\times 3}$, siempre existe un **único** plano que los contiene.

12. Dados $u = (1, -1, 0)$ y $v = (2, 3, -1)$, existe un único vector perpendicular a u y v **simultáneamente**, de norma 2.

13. Sean el plano $\pi : \lambda(0, 1, 1) + \mu(1, 2, 0) + (1, 0, 0)$ y el punto $P = (1, 6, 2)$. Entonces $d(\pi, P) = 0$.

14. Sean en $\mathbb{R}^3$ las rectas $L_1 : \lambda(1, 1, 1)$ y $L_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y & = & 0 \\ x - z & = & 1 \end{array} \right.$. Entonces $d(L_1, L_2) = \sqrt{2}$.