

## ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2010

### Práctica 6 - Diagonalización

1. Hallar los autovalores y bases de los respectivos autoespacios para cada una de las siguientes matrices:

(a)  $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$

(b)  $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

(c)  $\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(e)  $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(f)  $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(g)  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

(h)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(i)  $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Determinar si cada una de las matrices  $A$  del ejercicio 1 es o no diagonalizable. En los casos en que sí lo sea, hallar una base de autovectores de  $A$  y una matriz invertible  $C$  que diagonalice a  $A$  (es decir, tal que  $C^{-1} \cdot A \cdot C$  sea diagonal).

3. Mostrar que la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  no es diagonalizable cualesquiera sean  $a, b \in \mathbb{R}$  con tal que  $b \neq 0$ .

4. Sea  $A = \begin{pmatrix} r & s & t \\ -12 & 6 & 16 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matriz tal que  $v = (1, 2, 0)$ ,  $w = (2, 6, 0)$  y  $u = (-2, -2, -1)$  son autovectores de  $A$ .

(a) Probar que  $A$  es diagonalizable.

(b) Calcular los autovalores de  $A$  y determinar los valores de  $r, s$  y  $t$ .

5. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) Probar que  $A$  es diagonalizable y hallar una matriz invertible  $C$  que diagonalice a  $A$ .

(b) Calcular  $A^{10}$ .

6. Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y sea  $v = (1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ .

(a) Probar que  $A$  es diagonalizable y hallar una matriz invertible  $C$  que diagonalice a  $A$ .

(b) Calcular  $A^6 \cdot v^t$  utilizando la diagonalización de  $A$ .

(c) Escribir al vector  $v$  como combinación lineal de una base de  $\mathbb{R}^3$  de autovectores de  $A$ .

(d) Calcular nuevamente  $A^6 \cdot v^t$  sin utilizar la diagonalización de  $A$ .

7. Sea  $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y sea  $v = (-2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ .

- (a) Hallar los autovalores de  $A$  y los autovectores asociados.
- (b) Probar que  $A$  **no** es diagonalizable.
- (c) Escribir al vector  $v$  como combinación lineal de autovectores de  $A$ .
- (d) Calcular  $A^{63} \cdot v^t$ .

8. Sea  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

- (a) Hallar todos los valores de  $b \in \mathbb{R}$  para los cuales  $\lambda = 3$  es autovalor de  $A$ .
- (b) Para cada  $b$  hallado, dar todos los valores de  $a \in \mathbb{R}$  para los que  $A$  **no** es diagonalizable.

9. Hallar todos los  $a \in \mathbb{R}$  tales que  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  **no** es diagonalizable.

10. Sea  $A = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ a+2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

- (a) Hallar todos los valores de  $a \in \mathbb{R}$  para los que  $A$  **no** es diagonalizable.
- (b) Para cada  $a$  hallado, dar todos los  $b \in \mathbb{R}$  tales que  $(0, b^2 + 1, 2)$  es autovector de  $A$ .

11. Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $\lambda = 1$  es autovalor de  $A$  y  $(1, 1, 1) \in N(I - A)$ .

- (a) Determinar  $a, b$  y  $c$  y hallar todos los autovalores de  $A$ .
- (b) ¿Es  $A$  diagonalizable?
- (c) Calcular  $A^{100}$  y  $A^{201}$ .

12. Sea  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Hallar los autovalores y autovectores de  $A, A^3$  y  $A^9$ .

13. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matriz con autovalores  $\{0, 1, 5\}$ .

- (a) Determinar si  $A$  es inversible y/o diagonalizable.
- (b) Calcular los autovalores de  $B = (3A - 4I)^3$  y  $C = 5A^t + 4I$ .
- (c) Probar que  $H = A + I$  es inversible y calcular los autovalores de  $H^{-1}$ ,  $\det(H^{-1})$  y  $\text{tr}(H^{-1})$ .
- (d) Hallar todos los  $\alpha \in \mathbb{R}$  para los cuales  $\alpha A + 3I$  no es inversible.

14. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matriz tal que  $\{1, 2, 3\}$  son las raíces de  $\chi_A$ . Sea  $B = 5A^2 + 3A - 2I$ . Calcular  $\det(B)$  y  $\text{tr}(B)$ .

15. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matriz tal que  $\lambda = 1$  es autovalor de  $A$ ,  $\text{tr}(A) = 2$  y  $\det(A) = -2$ .
- Hallar **todos** los autovalores de  $A$ .
  - Decidir si  $A^t$  es o no diagonalizable.
16. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matriz tal que  $\dim(N(A)) = 1$ ,  $\text{rg}(A + 2I) = 2$  y  $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ .
- Calcular los autovalores de  $A$ .
  - Decidir si  $A$  es inversible y/o diagonalizable.
17. Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  una matriz inversible tal que  $\text{tr}(A) = -2$ ,  $\text{rg}(A^{-1} - \frac{1}{2}I) < 3$  y  $\chi_A(1) = -8$ . Probar que  $A$  es diagonalizable.
18. Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  una matriz tal que  $N(A + I) \neq \{0\}$ ,  $\text{rg}(A - 2I) \leq 2$  y  $\chi_A(1) = -4$ . Decidir si  $A$  es diagonalizable y calcular  $A^3 - 4A^2 + A + 6I$ .

19. Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ . Probar que:

- $A^4 = 7A^3 - 17A^2 + 5A + 6I$ .
- $A^5 - 6A^4 = -10A^3 - 12A^2 + 11A + 6I$ .