ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2010

Práctica 4 - Geometría lineal - Aproximación por cuadrados mínimos

Geometría lineal

1. En cada uno de los siguientes casos, decidir gráfica y analíticamente cuáles de los puntos pertenecen a la recta L:

   (a) $L : t(-2,3) + (2,2)$
   $P_1 = (2,2),\ P_2 = (-2,3),\ P_3 = (0,0),\ P_4 = (12,-13),\ P_5 = (2,-1).$

   (b) $L : t(-1,1) + (3,-3)$
   $P_1 = (3,-3),\ P_2 = (0,0),\ P_3 = (-1,1),\ P_4 = (3,4),\ \ P_5 = (\frac{2}{3},\frac{2}{3}).$

2. Graficar y dar una ecuación vectorial para la recta que:

   (a) pasa por $P = (-1,2)$ con vector director $v = (3,1)$.

   (b) pasa por $P = (1,-4)$ y $Q = (-1,-3)$.

   (c) es paralela a la recta $L :\ t(-2,3) + (1,-1)$ y pasa por $P = (1,-4)$.

   (d) es perpendicular a la recta $L :\ t(2,3) + (5,7)$ y pasa por el origen.

3. (a) Dar una ecuación vectorial para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

   i. $y = -2x + 1$.
   ii. $2x - 3y = 5$.
   iii. $y = -2$.
   iv. $x = 3$.

   (b) Dar una ecuación implícita para cada una de las siguientes rectas en $\mathbb{R}^2$:

   i. $L : t(3,2) + (1,1)$.
   ii. $L : t(2,0) + (-1,3)$.
   iii. $L : t(0,-1) + (2,1)$.

4. En cada uno de los siguientes casos, dar una ecuación vectorial para la recta que:

   (a) está dirigida por $v = (0,1,0)$ y pasa por $P = (0,2,4)$.

   (b) pasa por los puntos $P = (-2,3,4)$ y $Q = (-1,3,1)$.

   (c) es paralela al eje z y pasa por $P = (1,2,3)$.

   (d) es perpendicular a la recta $L :\ t(1,-2,1) + (3,5,7)$ y pasa por $P = (1,9,-3)$. ¿Es única?

5. Dar la ecuación vectorial del plano dirigido por v y w que pasa por el punto P en los siguientes casos:

   (a) $v = (0,1,0)$, $w = (1,0,0)$, $P = (0,0,1)$.

   (b) $v = (0,2,0)$, $w = (1,1,0)$, $P = (-1,2,1)$.

   Graficar los planos y compararlos.

6. (a) Dar una ecuación implícita para el plano $\pi : t(1,1,0) + s(0,-1,2) + (-2,0,4)$.

   (b) Dar una ecuación vectorial para el plano $\pi : -x + 3y + 2z = 1$.

7. Dar una ecuación paramétrica y una ecuación implícita para el plano que:

   (a) pasa por los puntos $(2,1,2)$, $(1,1,1)$ y $(3,2,7)$.

   (b) pasa por el punto $(1,2,1)$ y es paralelo al plano que contiene a los ejes x e y.

(c) es paralelo a la recta $L: \ t(1,2,-4)+(1,2,1)$ y contiene a los puntos $P=(2,2,1)$ y $Q=(1,2,-3)$.

(d) contiene al punto $(-1,2,2)$ y es ortogonal a la recta $L: \ t(1,1,-1)+(-1,2,2)$.

8. (a) Decidir si los puntos $A=(1,1,1),\ B=(-2,0,1)$ y $C=(3,0,2)$ son colineales (están sobre una misma recta) o no.

   (b) Decidir si los puntos $A=(8,2,4),\ B=(4,2,8),\ C=(-2,0,1)$ y $D=(1,-1,3)$ son coplanares (están sobre un mismo plano) o no.

9. Dado el plano $\pi: \ 2x-5y+3z=11$:

   (a) Hallar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $(2a,a,7) \in \pi$.

   (b) Decidir si existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que $(1,3a,5a) \in \pi$.

10. Sean $\pi: 2x-y+3z=5$, $L: t(1,-1,-1)+(1,0,-2)$ y $L': t(3,5,1)+(0,1,2)$. Calcular $L \cap \pi$ y $L' \cap \pi$.

11. Determinar si las rectas L y L' resultan concurrentes, paralelas/coincidentes o alabeadas:

    (a) $L: \ t(1,0,-1)+(-1,1,2), \quad L': \ t(-1,1,2)+(1,0,-1)$.

    (b) $L: \ t(1,1,-1)+(-1,2,2), \quad L': \ t(2,2,-2)+(1,0,-1)$.

    (c) $L: \ t(1,\frac{1}{2},-1)+(-1,1,2), \quad L': \ t(-2,-1,2)+(3,3,-2)$.

    (d) $L: \ t(1,2,-1)+(-1,-1,2), \quad L': \ t(-1,1,1)+(3,2,-1)$.

    En cada caso determinar si existe un plano que contenga a L y L'. Si la respuesta es afirmativa, hallarlo.

12. Determinar en qué casos los planos π_1 y π_2 se intersecan y hallar la intersección.

    (a) $\pi_1: \ 4x+2y-3z=1; \quad \pi_2: \ 2x+y-\frac{3}{2}z=1$.

    (b) $\pi_1: \ 3x-2y-1=0; \quad \pi_2$ el plano dirigido por $(0,0,1)$, $(2,3,3)$ que pasa por $(1,1,2)$.

    (c) π_1 el plano que pasa por $(-1,1,2)$ con vector normal $(1,2,-1)$;
    π_2 el plano que pasa por $(1,1,1),\ (2,3,1)$ y $(-1,-2,2)$.

13. Hallar ecuaciones implícitas para cada una de las rectas siguientes (es decir, describirlas como intersección de dos planos dados por ecuaciones implícitas):

    (a) L que es intersección del plano xy con el plano yz.

    (b) $L: \ t(1,0,-1)+(-1,1,2)$.

    (c) L que pasa por los puntos $(-5,3,7)$ y $(2,-3,3)$.

14. En cada uno de los siguientes casos, hallar la intersección de las rectas L y L':

    (a) $L: t(1,1,0)+(0,-1,2), \quad L': \begin{cases} x-y+z=3 \\ -2x+y+z=-2 \end{cases}$.

    (b) $L: t(1,1,0)+(0,-1,2), \quad L': \begin{cases} x-y+z=3 \\ -2x+2y+z=2 \end{cases}$.

15. Sean L_1 y L_2 las rectas de $\mathbb{R}^2$, $L_1: x-y=1$, y $L_2: x+y=3$.

    (a) Calcular el ángulo entre L_1 y L_2.

    (b) Hallar una recta L_3 tal que $\angle(L_1,L_3)=\angle(L_2,L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

16. Sean $L_1 : t(1,-2,1) + (0,0,-2)$ y L_2 la recta que pasa por $(1,4,2)$ y $(0,2,-1)$.
    (a) Verificar que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.
    (b) Hallar un plano que contenga a L_1 y L_2 y determinar el ángulo entre L_1 y L_2.
17. Sea L_1 la recta que tiene dirección $(1,2,-1)$ y pasa por $(-1,3,1)$, y sea L_2 la recta que pasa por $(-1,1,3)$ y por $(1,2,7)$.
    (a) Verificar que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.
    (b) Determinar una recta L_3 paralela a L_1 que interseque a L_2 en el punto $(-1,1,3)$ y hallar el ángulo entre L_3 y L_2.
18. Encontrar **todos** los puntos de la recta $L:\ t(1,-1,0) + (2,1,-1)$ que están a distancia 6 del punto $P = (2,1,-1)$.
19. Calcular la distancia entre:
    (a) la recta $L:\ t(1,1) + (3,0)$ y el punto $P = (-1,1)$.
    (b) la recta $L:\ t(1,1,0) + (3,0,0)$ y el punto $P = (-1,1,0)$.
    (c) el plano π que pasa por $(1,2,1)$ y tiene vector normal $(1,-1,2)$ y el punto $P = (1,2,5)$.
20. Sean $L : t(2,-2,-3) + (0,2,2)$ y $P = (0,-2,-1)$.
    (a) Hallar el plano π perpendicular a L que pasa por P y determinar $Q = L \cap \pi$.
    (b) Calcular $d(P,Q)$. ¿Qué significa en este problema el número $d(P,Q)$?
21. Se consideran las rectas $L_1 : \begin{cases} 2x - y - z &= 4 \\ 4x - y - 2z &= 9 \end{cases}$ y $L_2:\ t(1,0,2) + (1,2,-3)$.
    (a) Probar que L_1 y L_2 son paralelas.
    (b) Hallar un plano π perpendicular a L_2 que pase por $P = (1,2,-3)$ y determinar $Q = L_1 \cap \pi$.
    (c) Calcular $d(P,Q)$. ¿Qué significa el número $d(P,Q)$ en este problema?
22. Sean π el plano de ecuación $x + y + z = 1$ y L la recta $L : t(-1,0,1) + (1,1,2)$.
    (a) Probar que L es paralela a π.
    (b) Hallar una recta L' ortogonal a π que pase por $P = (1,1,2)$ y determinar $Q = L' \cap \pi$.
    (c) Calcular $d(P,Q)$. ¿Qué significa el número $d(P,Q)$ en este problema?

Aproximación por cuadrados mínimos

1. Hallar y graficar las rectas que mejor aproximan en el sentido de los cuadrados mínimos a los siguientes conjuntos de puntos:
    (a) $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,3)$, $(3,3)$ y $(4,3)$.
    (b) $(1,0)$, $(3,2)$, $(5,4)$, $(6,5)$ y $(7,7)$.
2. Encontrar el polinomio de grado 2 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos la tabla:

x	0.1	0.3	0.5	0.7
y	1.3	2	2.7	3.5

3. Ajustar la siguiente tabla de datos mediante una función exponencial de la forma $y = k \cdot a^x$:

x	0	1	2	3	4
y	2	3	6	9	15

4. La siguiente tabla tiene la altura y el peso de 6 hombres entre 25 y 29 años de edad:

Altura (metros)	1.83	1.73	1.68	1.88	1.63	1.78
Peso (kilogramos)	79	69	70	81	63	73

   (a) Ajustar linealmente estos datos.
   (b) Estimar el peso de un hombre de 27 años y 1.75 m de altura.
   (c) Estimar la altura de una persona de 28 años y 68 kg. de peso.

5. En un cultivo se mide la cantidad de bacterias por unidad de volumen cada hora, obteniéndose la siguiente tabla de datos:

Horas	0	1	2	3	4	5	6
Bacterias	32	47	65	92	132	190	275

   (a) Ajustar estos datos con una función exponencial.
   (b) Estimar, según la aproximación hecha, el número de bacterias en la décima hora de la medición.

6. El porcentaje de mortalidad de ciertos ácaros expuestos a una temperatura menor que 0°C durante cierto número de días está descrito en la siguiente tabla:

Días	1	3	8	13	16
Porcentaje	0.8	3.6	11.6	22.6	30

   Ajustar estos datos con un polinomio de grado 2.

7. Para la siguiente tabla de datos se ha propuesto el modelo $y = \dfrac{10}{ax+b}$ donde a y b son valores desconocidos.

x	0	1	2	3	4
y	9.9	3.4	2	1.43	1.1

   Haciendo el cambio de variable $z = \dfrac{10}{y}$ y empleando el método de cuadrados mínimos, estimar los valores de a y b.

8. Para el modelo $y = \dfrac{x^2+1}{ax+b}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, calcular la mejor aproximación en el sentido de los cuadrados mínimos, a partir de los siguientes datos:

x	0	1	2	3
y	0.6	0.5	1	1.5

9. Se sabe que la siguiente tabla de datos corresponde con una muestra que verifica una relación de la forma $ax + 3y + bz = 0$. Plantear un modelo conveniente que permita determinar los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ por el método de los cuadrados mínimos:

x	-2	0	0.5	1
y	1	0.9	0.1	-1
z	1	0	0.5	1