# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Verano 2010

## Práctica 3 - Matrices y Determinantes

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

   (a) $A + 3B - 3C$.
   (b) $A + 3(B - C)$.
   (c) $A - (B - 2C)$.
   (d) $A - B + 2C$.

2. Se consideran matrices de los siguientes tamaños: $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, $B \in \mathbb{R}^{5\times 7}$, $C \in \mathbb{R}^{7\times 5}$. Indicar cuáles de las siguientes operaciones son posibles. En caso afirmativo, indicar el tamaño (número de filas y de columnas) de la matriz resultado.

   (a) $A \cdot B$.
   (b) $B \cdot A$.
   (c) $B \cdot C$.
   (d) $C \cdot B$.
   (e) $A \cdot B \cdot C$.
   (f) $B \cdot C \cdot A$.
   (g) $A \cdot A$.
   (h) $B \cdot C \cdot B \cdot C$.

3. Cuando sea posible, calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Vale la igualdad entre estos productos?

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular:

   (a) $A^2$.
   (b) $B^3$.
   (c) $-2A^2 + B^3A$.

5. Mostrar, dando un contraejemplo, que la propiedad "$A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$" no es válida para matrices.

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ analizar si son válidas (para matrices) las fórmulas clásicas de factorización:

   (a) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   (b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular:

   (a) $A^t$ y $B^t$.

(b) $(A \cdot B)^t$ y $B^t \cdot A^t$.

8. Dar ejemplos, si existen, de matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que $A \neq 0$ y $A \neq I$ (distinta de la matriz nula y de la matriz identidad) que cumplan:

   (a) $A^2 = I$.
   (b) $A^2 = 0$.
   (c) $A^2 = A$.
   (d) $A \cdot B = B \cdot A$ para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

9. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, calcular los siguientes productos y analizar el resultado en términos de la matriz $A$. ¿Qué cambios producen los productos en la matiz $A$?

   (a) $A \cdot \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \cdot A$.
   (b) $A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A$.
   (c) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.
   (d) $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \cdot A$.

10. Calcular, si es posible, la matriz inversa de cada una de las siguientes matrices verificando que la matriz hallada es efectivamente la inversa.

    (a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
    (b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
    (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
    (d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
    (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
    (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Verificar que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ son inversibles y calcular:

    (a) $A^{-1}$ y $B^{-1}$.
    (b) $(AB)^{-1}$ y $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

12. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, verificar que:

    (a) si $ad - bc \neq 0$, entonces $A$ es inversible con inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
    (b) si $ad - bc = 0$, entonces $A$ no es inversible.

13. En cada uno de los siguientes casos hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ o $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, según corresponda, tales que:

    (a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
    (b) $X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$.
    (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    (d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

14. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que verifican $A \cdot X + 2X = B^t \cdot X + \dfrac{1}{2}C$ para $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

15. Hallar **todas** las matrices $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que verifican $A \cdot X = 2X + B^t$ para
$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

16. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

17. Para cada una de las siguientes matrices, hallar su determinante usando propiedades y realizando la menor cantidad de cálculos posibles.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -10 & 17 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & -15 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

18. Calcular el determinante de cada una de las siguientes matrices:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

19. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\det(A) = 5$. Calcular los determinantes de las matrices:

(a) $\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{pmatrix}$.

20. Hallar **todos** los $k \in \mathbb{R}$ para los que $A$ es inversible en cada uno de las siguientes casos:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ k & 2 \end{pmatrix}$. (b) $\begin{pmatrix} 4 & k \\ k & -2 \end{pmatrix}$. (c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & k \\ k & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

21. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 2$. Calcular:

(a) $\det(A^3)$.
(b) $\det(-2 \cdot A^3)$.
(c) $\det((-2 \cdot A)^3)$.
(d) $\det(A^{-3})$.
(e) $\det(B \cdot A \cdot B^{-1})$, $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ inversible.

22. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $\det(A) = 4$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular:

    (a) $\det(A + A \cdot B)$.  (b) $\det(-2A^{-1} + A^{-1} \cdot 5B)$.

23. Sea $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz inversible y sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz que verifica: $\det(A) = 8$ y $A \cdot B = \det(B) \cdot I$. Hallar $\det(B)$.

24. Sean $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Determinar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $B \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es inversible, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4-a & 3 & a^2-4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Considerar el sistema lineal

$$S : \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & = & 6 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 0 \end{cases}.$$

Reescribir el sistema como producto de matrices (notación matricial). Hacer lo mismo para el sistema homogéneo asociado.

26. Reescribir, mostrando las ecuaciones, el sistema lineal $A \cdot \bar{x} = b$ en cada uno de los siguientes casos, y clasificar el sistema usando la noción de determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}; \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

27. Clasificar el sistema lineal $S : \begin{cases} -x + \alpha y + z & = & \alpha \\ -x + (1-\alpha)z & = & 1 \\ -x + y + z & = & \alpha^2 \end{cases}$ en términos del valor $\alpha \in \mathbb{R}$ usando determinantes.

28. Encontrar **todos** los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $Ax = x$ admite solución no trivial, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & a+1 & a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

29. Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz con $\det(B) = 5$. Hallar **todos** los $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tales que $(B \cdot A) \cdot x = 2B \cdot x$.