**Ejercicios adicionales para el 2° parcial**

Determinar (con justificaciones claras o contraejemplos) la validez of falsedad de las siguientes afirmaciones.

1. Sea $S$ un subespacio de $\mathbb{R}^4$ tal que $dim(S) = 3$. Entonces es posible hallar un subespacio $T$ de dimensión 2, tal que $S + T = \mathbb{R}^4$ y $S \cap T = \{0\}$.
2. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\} = \langle (1, -1, 2), (0, 0, 4) \rangle$. Entonces $\mathrm{rg}(A) = 1$.
3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que el sistema $Ax = 0$ admite solución no trivial. Entonces el $Rg(A) = 3$.
4. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ inversible entonces $\mathsf{Rg}(A^3 - 2A) = \mathsf{Rg}(A^2 - 2I)$.
5. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, entonces $N(A) = N(A^t)$.
6. Si $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$, entonces $\dim(N(A)) = \dim(N(A^t))$.
7. Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, entonces $\dim Nu(A) = \dim Nu(A^t)$.
8. Si $A, B \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ son matrices tales que $\det A \neq 0$ y 2 no es autovalor de $B$, entonces $2A^2 - A^2B$ es inversible.
9. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\lambda = 1$ es el único autovalor, entonces $A = I$.
10. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonalizable, tal que $\det A = 1$ y $TrA = 2$. Entonces $A = I$.
11. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz de Markov tal que $\lambda = -1$ es autovalor, entonces $A^2 = Id$.
12. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, tal que $Rg(A) = 1$, $\lambda = 4$ es autovalor de $A$. Entonces $A$ es diagonalizable.
13. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que el sistema $Ax = 3x$ tiene solución no nula, $\mathrm{rg}(A+I) \leq 2$ y $\mathrm{tr}(A) = 1$, entonces $A$ no es inversible.
14. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no nula y diagonalizable, para la cual existe un único autovalor de multiplicidad $n$. Entonces $A$ es inversible.
15. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\dim Nu(A - 2I) = 2$. Entonces $A$ es una matriz escalar (es decir, es de la forma $\alpha I$ con $\alpha \in \mathbb{R}$).
16. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ de Markov, entonces $A$ es inversible.
17. Sea $A$ una matriz de Markov, tal que $A^t$ también es de Markov.

    *a*) Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ entonces $A$ es simétrica.

    *b*) Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ entonces $A$ es simétrica.

    *c*) El vector $v = (1, 1, 1)$ es autovector de $A$.

    (Se dice que una matriz $A$ es simétrica si $A = A^t$.)
18. *a*) Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz de Markov. Entonces $A$ es inversible.

    *b*) Sea $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz de Markov. Entonces $B^2$ es de Markov.

    *c*) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz de Markov. Entonces el vector $v = (1, 1, 1)$ es autovector de $A^t$ asociado al autovalor 1.