ANÁLISIS MATEMÁTICO I (LIC. EN CS. BIOLÓGICAS)

Curso de Verano de 2010

Práctica 1: Funciones

Ejercicio 1. Resolver las siguientes ecuaciones:

(*a*) $4x + 3 = -3$

(*b*) $5x + 3 = 8x + 1$

(*c*) $\dfrac{x-2}{7} + \dfrac{x-5}{8} = 3$

(*d*) $|x - 2| = 1$

(*e*) $\dfrac{x+5}{x-5} + \dfrac{x-5}{x+5} = \dfrac{10}{3}$

(*f*) $\dfrac{3}{13}x^2 - \dfrac{7}{5}x = 0$

(*g*) $22x^2 - 3x = 21x + 14x^2$

(*h*) $\dfrac{9}{x} - \dfrac{x}{x+4} = 1$

(*i*) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x}{x+4} = 1$

Ejercicio 2. Resolver las siguientes inecuaciones:

(*a*) $4x + 3 \geq -3$

(*b*) $5x + 3 > 8x + 1$

(*c*) $\dfrac{2}{x+1} > 5$

(*d*) $\dfrac{3x-1}{-2} > 4$

(*e*) $5x - 3 \leq -8x + 1$

(*f*) $\dfrac{2x}{x+2} < 4$

(*g*) $\dfrac{3x+5}{x-2} \geq 1$

(*h*) $1 - \dfrac{x-1}{x} < -5$

(*i*) $|x - 3| \leq 1$

(*j*) $|x + 3| > 10$

(*k*) $|3x - 1| > 2$

(*l*) $-2|5 - \dfrac{x}{2}| \geq 6$

(*m*) $|x| > |x + 2|$

(*n*) $|3x - 1| < |x - 1|$

(*ñ*) $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1$

(*o*) $|2 - 6x| + |3x - 1| > 4$

(*p*) $\dfrac{x}{|x+4|} > 3$

(*q*) $\dfrac{2}{1 - |x-2|} < 1$

(*r*) $\dfrac{|2x-8|}{1 - |x-2|} < 1$

Ejercicio 3. Representar gráficamente en la recta numérica los conjuntos de números reales x que cumplen cada una de las siguientes condiciones:

(*a*) x es mayor a -2.

(*b*) $4x+3 \geq -3$

(*c*) $-2 \leq x \leq 4$

(*d*) $-3 \leq 2x+3 < 3$

(*e*) $-2 < -3x+1 < 0$

(*f*) $2x+3 < -3x$

(*g*) $2x+3 \geq -3x$

(*h*) $\dfrac{2x}{x+2} < 0$

(*i*) $\dfrac{2x}{x+2} > 0$

(*j*) $2x(x+5) = 0$

(*k*) $x^2 - 49 = 0$

(*l*) $x^2 - 49 > 0$

(*m*) $x^2 - 49 < 0$

(*n*) $(x-2)^2 > 25$

(*ñ*) $\dfrac{3x-1}{-2} > 4$

(*o*) $\dfrac{9}{x} - \dfrac{x}{3} < 2$

(*p*) $|x-1| < 1$

(*q*) $|x-3| < |2-x|$

(*r*) $0 < x^2 \leq x^3$

(*s*) $|x+3| + |x-9| > 2$

(*t*) $||x+2| - |x-1|| < 1$

(*u*) $|x^3-1| + |2-x^3| = 1$

Ejercicio 4. Se definen las siguientes funciones con valores reales:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \qquad\qquad g(x) = x^3 - 1$$

(*a*) Calcular el valor de f en los puntos $0, \dfrac{1}{2}$ y 2.

(*b*) Para cada $a \in \mathbb{R}$ calcular $f(a)$ y $g(a+2)$.

(*c*) Hallar las funciones $[f(x)]^2$, $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

Ejercicio 5. Hallar el dominio natural de las siguientes funciones:

(*a*) $f(x) = 2x+1$

(*b*) $f(x) = \sqrt{3-2x}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+3}\sqrt{x-1}}$

(*d*) $f(x) = \dfrac{1}{3x+4}$

(*e*) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

(*f*) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x > 4 \\ \dfrac{1}{(x+3)(x+1)(x-5)} & \text{si } x \leq 4 \end{cases}$

(*g*) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

(*h*) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$

(*i*) $f(x) = \sqrt{4x^2-1}$

(*j*) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+5x+8}$

(*k*) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2-4)(x+5)(x^2+5)}$

(*l*) $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x \geq 1 \\ x+3 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

Ejercicio 6. Graficar las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(*a*) $f(x) = 2$

(*b*) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -3 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

(*d*) $f(x) = |x-1| + x$

(*e*) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ -x-1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Ejercicio 7. Hallar el dominio natural, el conjunto de ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de cada una de las siguientes funciones.

(*a*) $f(x) = 0$

(*b*) $f(x) = x$

(*c*) $f(x) = -x$

(*d*) $f(x) = \sqrt{3-x}$

(*e*) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-2x-3}$

(*f*) $f(x) = x^3 + 1$

(*g*) $f(x) = 2x - 1$

(*h*) $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$

(*i*) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

(*j*) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

(*k*) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

(*l*) $f(x) = \dfrac{x}{|x+1|}$

(*m*) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

(*n*) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3}}{x\sqrt{x+5}}$

Ejercicio 8. Graficar en el mismo sistema de ejes cartesianos cada uno de los siguientes conjuntos de funciones con valores reales:

(*a*) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x+2$, $f_3(x) = x-2$, $f_4(x) = -x$, $f_5(x) = -x+2$, $f_6(x) = -x-2$.

(*b*) $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = |x|+3$, $f_3(x) = |x|-3$, $f_4(x) = |x+3|$, $f_5(x) = |x-3|$, $f_6(x) = -|x|$.

(*c*) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2+1$, $f_3(x) = x^2-1$, $f_4(x) = (x+1)^2$, $f_5(x) = (x-1)^2$.

(*d*) $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -x^2$, $f_3(x) = -x^2+1$, $f_4(x) = -x^2-1$.

(*e*) $f_1(x) = x^2-1$, $f_2(x) = 2(x^2-1)$, $f_3(x) = \dfrac{1}{2}(x^2-1)$, $f_4(x) = -1(x^2-1)$.

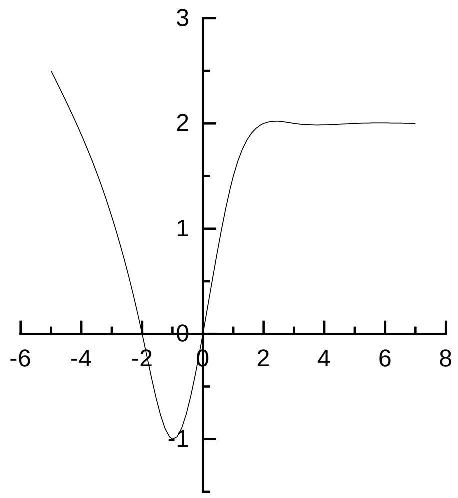
(*f*) $f_1(x) = x^2-5x+4$, $f_2(x) = |x^2-5x+4|$.

(g) $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^3 + 1$, $f_3(x) = (x+1)^3$, $f_4(x) = -x^3$, $f_5(x) = (x+1)^3 - 2$, $f_6(x) = |x^3|$.

(h) $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x} + 1$, $f_3(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $f_4(x) = \dfrac{1}{x-2} - 3$, $f_5(x) = -\dfrac{1}{x}$, $f_6(x) = -\dfrac{1}{x+2} + 3$.

¿Qué conclusiones es posible obtener a partir de la observación comparativa de los gráficos de estas funciones?

Ejercicio 9. Considerando la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo gráfico es:



y teniendo en cuenta lo observado en el problema anterior, obtener los gráficos de las funciones: $f_1(x) = f(x) + 1$, $f_2(x) = f(x-2)$, $f_3(x) = -f(x)$.

Ejercicio 10.

(a) A partir del gráfico de $f(x) = \sin(x)$ obtenga los gráficos de las siguientes funciones:

$f_1(x) = \sin(x) + 1$ $\quad f_2(x) = \sin(x) - 1$ $\quad f_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ $\quad f_4(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$,
$f_5(x) = -\sin(x)$ $\quad f_6(x) = |\sin(x)|$ $\quad f_7(x) = |\sin(x)| + 1$ $\quad f_8(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) + 1$.

(b) A partir del gráfico de $f(x) = \cos(x)$ obtenga los gráficos de las siguientes funciones:

$f_1(x) = \cos(x) + 2$ $\quad f_2(x) = \cos(x) - 2$ $\quad f_3(x) = \cos(x - \pi)$ $\quad f_4(x) = \cos(x + \pi)$,
$f_5(x) = -\cos(x)$ $\quad f_6(x) = |\cos(x)|$ $\quad f_7(x) = |\cos(x)| - 1$ $\quad f_8(x) = \cos(x + \pi) - 1$.

Ejercicio 11. Consideremos las siguientes funciones con valores reales:

$$f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = (x+1)^{-1}, \quad h(x) = 3x - 2.$$

(*a*) Determinar el dominio natural de cada una de ellas.

(*b*) Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justificar.

- $-3 \in \operatorname{Im} f$
- $0 \in \operatorname{Im} g$
- $-1 \in \operatorname{Im} g$
- $\operatorname{Im} h = \mathbb{R}$
- $0 \in \operatorname{Im} f$
- $5 \in \operatorname{Im} g$

(*c*) Calcular si es posible:

- $(g \circ f)(-1)$
- $(h \circ f)(7)$
- $(f \circ h)(7)$
- $(f \circ h)(1)$
- $(f \circ g)(3)$
- $(g \circ f)(6)$

(*d*) Dar las fórmulas que describan las relaciones funcionales de las siguientes composiciones:

- $f \circ g$
- $g \circ f$
- $g \circ h$
- $f \circ h$
- $f \circ f$
- $(f \circ g) \circ h$

¿Coinciden $f \circ g$ y $g \circ f$ como funciones?

Ejercicio 12. Determinar el dominio natural y la imagen de las siguientes funciones y estudiar su inyectividad y sobreyectividad.

(*a*) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

(*b*) $f(x) = \sqrt{x+2}$

(*c*) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \geq 0; \\ x+1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(*d*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(*e*) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

(*f*) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \geq 0; \\ -x+1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Ejercicio 13. Demostrar la biyectividad de las siguientes funciones y determinar su inversa.

(*a*) $f(x) = 4x - 5$

(*b*) $f(x) = 3x - 2|x|$

Ejercicio 14. Calcular el dominio natural e imagen de las siguientes funciones y verificar que restringidas a dichos conjuntos resultan biyectivas. Encontrar sus inversas.

(*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(*b*) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$

(*c*) $f(x) = \dfrac{3x^3}{x^3 - 1}$

Ejercicio 15. Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares y cuáles son impares.

(*a*) $f(x) = x^2 + 2$

(*b*) $f(x) = 2x^3 - x$

(*c*) $f(x) = \sin(2x)$

(*d*) $f(x) = x + x^4$

(*e*) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

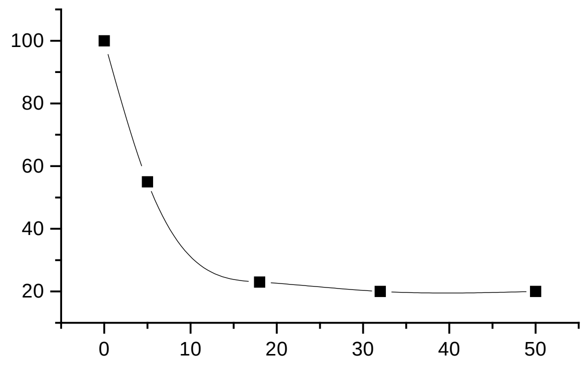
(*f*) $f(x) = x^2 + 2x - 4$

Ejercicio 16. En un recipiente que está en el fuego hay agua en ebullición. Cuando es retirado del fuego, durante los primeros 4 minutos se enfría rápidamente. En los 12 minutos siguientes la temperatura del agua sigue bajando más lentamente hasta estabilizarse a la temperatura ambiente (20 ° C). Trazar un gráfico que interprete esta evolución tomando la temperatura del líquido como función del tiempo.

Ejercicio 17.

(*a*) Hacer un gráfico que refleje la evolución de la temperatura en función del tiempo de acuerdo con la siguiente descripción : *"Se retira de fuego un jarro con agua hirviendo. Inicialmente la temperatura bajó con rapidez, de modo que a los 4 minutos era de 48 ° . Luego se fue enfriando más lentamente. A los 16 minutos del instante inicial la temperatura era de 24 ° y 16 minutos después llegó a 16 ° que era la temperatura del aire".*

(*b*) El siguiente gráfico, ¿corresponde a los datos descriptos? ¿Coincide con el gráfico que Ud. ha hecho? ¿Son ambos posibles? (El eje x corresponde al tiempo y el eje y a la temperatura.)



Ejercicio 18. Cada m^2 de azulejos vale \$7 y su colocación cuesta \$15 (por m^2). El corralón recarga \$20 de flete.

(a) Escribir la función que expresa el costo a partir de la superficie cubierta.

(b) Señalar el dominio de esta función.

(c) ¿Cuál es el costo de cubrir 12 m^2 ?

(d) ¿Cuántos m^2 de azulejos se puede colocar gastando \$460?

Ejercicio 19. Cuando producen una cantidad x (en miles de toneladas) de mercadería, los productores I y II reciben respectivamente beneficios mensuales (en miles de pesos) de :

$$p_I(x) = -x^2 + 8x - 7 \qquad\qquad p_{II}(x) = \frac{7}{6}x - 2$$

(a) Graficar ambas funciones de ganancia.

(b) ¿Cuántas toneladas deben producir ambos productores para obtener la misma ganancia?

Ejercicio 20. Un proyectil es disparado desde el suelo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $120m/s$. La posición del proyectil a los t segundos está expresada por $h(t) = -4,9t^2 + 120t$.

(a) ¿Para qué valores de t asciende el proyectil? ¿Para cuáles desciende?

(b) Hallar el instante en el que el proyectil alcanza la altura máxima. Calcular esa altura.

(c) Hallar el tiempo que demora el proyectil en llegar al suelo.

(d) Si se efectúa otro disparo con la misma arma y en las mismas condiciones, pero desde $50m$ de altura, determinar la función que exprese su posición en el instante t. Responder a las preguntas (a), (b) y (c) en este caso.

Ejercicio 21. En una laguna se introdujeron 100 truchas. Al principio el cardumen creció rápidamente, pero después de un tiempo los recursos de la laguna escasearon y la población decreció. Si el número de truchas t años después de la siembra está expresado por $N(t) = -12t^2 + 21t + 100$ (donde $t > 0$).

(a) Determinar los valores positivos de t para los cuales $N(t) > 0$.

(b) ¿Se extingue la población de truchas? Si es así, ¿cuándo ocurre esto?

Ejercicio 22. La dosis recomendada de determinado medicamento (medida en mg) es una función lineal del peso x del paciente, expresado en kg. Sabemos que a un paciente de $10\,kg$ de peso se le debe administrar $23\,mg$ diarios de la sustancia, mientras que un paciente de $50\,kg$ de peso debe recibir $63\,mg$ del fármaco. Determinar la función que expresa la dosis correcta para un individuo que pese $x\,kg$. Graficar esta función.