

Práctica 7: Integración

Integración en una variable (repaso)

1. Calcular:

(a) $\int \operatorname{sen} x \, dx.$

(b) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x \, dx.$

(c) El área entre las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$.

2. Calcular:

(a) $\int x \operatorname{sen} x \, dx.$

(c) $\int x e^{x^2} \, dx.$

(e) $\int \frac{3x - 2}{x^2 + x - 2} \, dx.$

(b) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx.$

(d) $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx.$

(f) $\int \ln x \, dx.$

3. Hallar el área encerrada por las curvas:

(a) $y = x^3$ e $y = x$.

(b) $y = x^3 - x$ y la recta tangente a esta curva en $x = -1$.

(c) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ y la recta $y = 12$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

4. (a) Calcular $\int_{-2}^0 e^x \, dx.$

(b) Hallar el área encerrada por las curvas: $y = 0$, $y = -2$, $y = \ln x$ y $x = 0$.
Sugerencia: Dibujar la región y usar (a).

5. Calcular:

(a) $\int_{-2}^3 x^2 - 1 \, dx.$

(c) $\int_{-2}^3 |x^2 + 1| \, dx.$

(e) $\int_1^4 \sqrt{|x - 3|} \, dx.$

(b) $\int_{-2}^3 |x^2 - 1| \, dx.$

(d) $\int_{-1}^2 ||x - 1| - |x|| \, dx.$

(f) $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(|x|) \, dx.$

Integrales impropias

6. (a) Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

$$\text{i. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \quad \text{ii. } \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \quad \text{iii. } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

Observación: Dividir los valores de p de la siguiente manera: $0 < p < 1$, $p = 1$ y $p > 1$.

- (b) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para $x > 0$, x^{-p} y $x^{-\frac{1}{p}}$ son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta $y = x$.

7. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} & \text{(e)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} & \text{(i)} \int_{-1}^3 \frac{dx}{(1-x)^3} \\ \text{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & \text{(f)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} & \text{(j)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+\cos x} dx \\ \text{(c)} \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx & \text{(g)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} & \text{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x) dx \\ \text{(d)} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx & \text{(h)} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} dx & \text{(l)} \int_0^4 \frac{x}{x^2-4} dx \end{array}$$

En los ítems (i), (k) y (l) estudiar, además, el valor principal.

8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

- (a) Si f es continua y positiva tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$
- (b) Si f es continua y positiva tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\int_0^{-\infty} f(x) dx = -\infty$
- (c) Si f es continua y decreciente con $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 3$, entonces el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- (d) Si f es una continua y positiva con $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 8$, entonces el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- (e) Si f es continua y positiva con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$.

9. Para los distintos valores de $p \in \mathbb{R}$ analizar la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)}.$$

10. Analizar la convergencia de la siguiente integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln(x)} + (x-1)^2} dx.$$

Sugerencia: Calcular los primeros términos del polinomio de Taylor de $\ln(x)$ en $x_0 = 1$.

11. Analizar la existencia de la siguiente integral impropia

$$\int_1^2 \frac{e^x}{\sqrt{-x^3 + 3x^2 - 2x}} dx.$$

Integrales dobles

12. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0, 1] \times [0, 1]$:

(a) $\iint_R (x^3 + y^2) dx dy.$

(e) $\iint_R (x^m y^n) dx dy$, donde $m, n > 0$.

(b) $\iint_R y e^{xy} dx dy.$

(f) $\iint_R (ax + by + c) dx dy.$

(c) $\iint_R (xy)^2 \cos x^3 dx dy.$

(g) $\iint_R \operatorname{sen}(x+y) dx dy.$

(d) $\iint_R \ln[(x+1)(y+1)] dx dy.$

(h) $\iint_R (x^2 + 2xy + yx^{1/2}) dx dy.$

13. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz , el plano yz , el plano xy , los planos $x = 1$ y $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.
14. Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente. Mostrar que si consideramos el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ entonces

$$\iint_R [f(x)g(y)] dx dy = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy.$$

15. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \operatorname{sen} y$, los planos $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \pi/2$ y el plano xy .
16. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$ y los “lados verticales” de R .
17. Sean $F \in \mathcal{C}^2$ y $f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y)$. Calcular $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$ en términos de F .
18. Graficar las regiones determinadas por los límites de integración de las siguientes integrales y calcular las integrales iteradas.

- (a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx.$
- (b) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx.$
- (c) $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y) dy dx.$
- (d) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y dy dx.$
- (e) $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y) dx dy$
- (f) $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx.$
- (g) $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy dx.$
- (h) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \operatorname{sen} x dy dx.$
- (i) $\int_0^1 \int_{y^2}^y (x^n + y^m) dx dy \quad (m, n > 0).$
- (j) $\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x dy dx.$
- (k) $\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} y} y dx dy.$
- (l) $\int_{-2}^0 \int_{x^3}^{x+1} (y^2 + 1) dy dx.$

19. Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y, & \text{si } x \text{ no es racional} \end{cases}$$

Mostrar que la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

20. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r y el área de una elipse con semiejes de longitud a y b .

21. Calcular el área de:

- (a) la región limitada por la recta $y = x$ y por la curva $y = x^2$.
- (b) la región formada por todos los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| \leq a$, $a \geq 0$.
- (c) la región formada por todos los puntos (x, y) tales que $x \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 2$, $x^2 + y^2 \geq 1$.

22. Calcular

$$\iint_T (x \operatorname{sen} x + y \operatorname{sen}(x+y)) dx dy$$

siendo T el triángulo de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(3, 3)$.

23. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

24. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular

$$\iint_D x^3 y dx dy.$$

25. Calcular el volumen de un cono de base de radio r y altura h .

26. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

(a) R : encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 10$.

(b) R : encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2 = x^2 + y^2$.

(c) R : encerrada por las superficies $x^2 + y^2 = z$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

(d) R : elipsoide con semiejes a, b y c .

(e) R : determinada por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ y $z \geq 2$.

27. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, graficar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

(a) $\int_0^1 \int_x^1 xy \, dydx.$

(d) $\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2 \, dx dy.$

(b) $\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 \, dx dy.$

(e) $\int_{-3}^3 \int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2 \, dx dy.$

(c) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} x^2 y \, dy dx.$

28. Calcular $\int_D y^2 x^{1/2} \, dx dy$ donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$$

29. Sea D la región limitada por las rectas $y = 2$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$ e $y = 1$. Calcular la siguiente integral

$$\iint_D x^2 y \, dA$$

30. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$ Calcular la siguiente integral

$$\iint_D \cos\left(\frac{x}{y}\right) \, dA$$

31. Calcular $\int_T e^{x-y} \, dx dy$ donde T es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 3)$, y $(2, 2)$.

32. Sea T la región “triangular” limitada por las rectas $y = x$, $y = \sqrt{2}$ y la curva $y = \sqrt{x}$. Calcular

$$\iint_R e^{\frac{x}{y}} \, dA.$$

Integrales triples

33. Calcular:

(a) $\iiint_C (xyz + x^2y^2z^2) dV$, donde $C = [0, 1] \times [-3, 2] \times [-1, 1]$.

(b) $\iiint_C (x \cos z + y \cos x + z \cos y) dV$, donde $C = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$.

34. Calcular el volumen de una esfera de radio r .

35. Calcular:

(a) $\iiint_W x dV$, donde W es la región limitada por, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, $z = x^2 + y^2$.

(b) $\iiint_W x^2 \cos z dV$, donde W es la región limitada por, $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $x = 0$, $x + y = 1$.

(c) $\iiint_W dV$, donde W es la región limitada por, $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 9 - x^2$.

(d) $\iiint_W (x + y + z) dV$, donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leq 1\}$.

(e) $\iiint_W (x^3 + y + z) dV$, donde $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], x^2 + y^2 \leq 1\}$.

36. Calcular $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x+y}^{x^2+y^2} dz dy dx$ y graficar la región de integración.

37. Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$$

para obtener otras cinco formas de realizar la misma integración. Graficar la región de integración.

38. Sea $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x, y, z)\| \leq 1\}$. Demostrar que si f es una función continua en B , impar respecto de z (es decir $f(x, y, z) = -f(x, y, -z)$), entonces $\iiint_B f(x, y, z) dV = 0$. ¿Para que otras regiones vale este resultado? (dar ejemplos).39. Sea W la región determinada por las condiciones $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ y $0 \leq z \leq xy$.(a) Hallar el volumen de W .(b) Calcular $\int_W x dx dy dz$.(c) Calcular $\int_W y dx dy dz$.(d) Calcular $\int_W z dx dy dz$.(e) Calcular $\int_W xy dx dy dz$.