Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Verano - 2010

Práctica 6: Extremos restringidos - Multiplicadores de Lagrange

1. Determinar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

   (a) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$;

   (b) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$;

   (c) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$;

   (d) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \quad A = \mathbb{R}^2$;

   (e) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

2. Considerar el cuadrado de vértices $(-1,0), (1,0), (1,-2)$ y $(-1,-2)$. Sea A la región determinada por el cuadrado y su interior. Encontrar los extremos absolutos de la función
$$f(x,y) = 2x - y^2$$
en el recinto B, donde B es el recinto
$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\Big\} \cap A.$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función
$$f(x,y) = (y-1)^2 - x^3 + 3x^2 + 5.$$
Encontrar, justificando su existencia, el máximo y el mínimo valor que alcanza f en la región
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq 4\}.$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x + \frac{1}{4}.$$
Encontrar, justificando su existencia, el máximo y el mínimo valor que alcanza f en la región
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1; \ x + y \geq 0\}.$$

5. Encontrar los puntos de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima

   (a) Usando multiplicadores de Lagrange;

   (b) Reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

6. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ dentro del círculo unitario y en el borde.

7. Encontrar los máximos y mínimos de $f(x,y) = y + x - 2xy$ en el interior y en el borde de
$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq \frac{1}{2}\right\}.$$

8. Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:

   (a) $f(x,y,z) = x - y + z \qquad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$
   (b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 = 1\}$
   (c) $f(x,y) = xy \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1\right\}$
   (d) $f(x,y) = \max(x,y) \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$
   (e) $f(x,y,z) = x + y + z \qquad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\}$
   (f) $f(x,y,z,w) = x + y - z - w \qquad A = \{(x,y,z,w) / x^2 + y^2 = 1 \text{ y } w = x + z\}$

9. Resolver los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

   (a) Encontrar la distancia más corta desde el punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$.
   (b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que esté más cerca del origen.
   (c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
   es $8abc/3\sqrt{3}$.

10. Encontrar la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$.

11. Encontrar el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

12. Si α, β, γ son tres ángulos positivos tales que $\alpha + \beta + \gamma = \pi/2$, probar que
$$\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\operatorname{sen}(\gamma) \leq \frac{1}{8}$$

13. Sea E el elipsoide definido por
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 3x^2 + y^2 - 2xy + z^2 = 1\}.$$
Encontrar el punto $p \in E$ más lejano al plano yz.

14. Encontrar los puntos del cono
$$z^2 = (y-2)^2 + (x-1)^2$$
más cercanos al origen de coordenadas.

15. Un envase cilíndrico (con tapa) debe tener capacidad de un litro. ¿Cómo debe diseñarse el envase para minimizar el material empleado?

16. Encontrar los puntos más lejanos y cercanos al punto $(0, 0, 2)$ de la esfera de ecuación

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$

17. Sean f y $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciables, tales que el máximo de f sobre la restricción $\Phi(x, y) = c$ se alcanza en el punto (x_c, y_c) . Si la función lagrangiana es $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(\Phi(x, y) - c)$ y $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ está dada por $\sigma(t) = (x_c, y_c)$, probar que el multiplicador de Lagrange λ da la razón de cambio del valor máximo de f a medida que cambia el valor c de la restricción, esto es:

$$\lambda = \frac{d(f \circ \sigma)}{dc}$$