Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Verano - 2010

Práctica 5:
Derivadas parciales de orden superior - Polinomio de Taylor - Convexidad y Extremos

Derivadas de orden superior

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2:

   (a) $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$

   (b) $f(x,y,z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy\,\mathrm{sen}(z)$

   (c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + \ln(z)$

2. Calcular todas las derivadas de tercer orden para las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y,z) = xyz$

   (b) $f(x,y,z) = e^{xyz}$

   (c) $f(x,y,z) = \cos(x^2+y) - \mathrm{sen}(y^2z)$

   (d) $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$

3. Sea $f(x,y) = \cos(xy)$. Además, x e y son funciones de las variables u y v de acuerdo a las siguientes fórmulas: $x(u,v) = u+v$, $y(u,v) = u-v$. Calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^3}{\partial u \partial v^2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$$

   (a) Sustituyendo

   (b) Usando la regla de la cadena.

Laplaciano - Función armónica

4. Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación de Laplace o bien que es una función armónica en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si:

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

   Verificar que las siguientes funciones son armónicas en $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Determinar U en cada caso:

   (a) $f(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2$

   (b) $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

   (c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

   (d) $f(x,y,z) = e^{3x+4}\cos(3z) + 4y$

5. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(||x||)$. Demostrar que:

$$\triangle f(x) = \frac{d^2 g}{dt}(||x||) + \frac{2}{||x||}\frac{dg}{dt}(||x||)$$

6. Sean f, g dos funciones C^2 definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Probar que f y g son armónicas en U.

Polinomio de Taylor

7. Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.

   (a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$
   (b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$
   (c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0, 0)$
   (d) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$ en $(1, 0)$
   (e) $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$ en $(1, \pi)$
   (f) $f(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$
   (g) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ en $(2, 3)$
   (h) $f(x, y) = x + xy + 2y$ en $(1, 1)$
   (i) $f(x, y) = x^y$ en $(1, 2)$
   (j) $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2, 3, 4)$

8. Utilizando los resultados anteriores calcular $(0.95)^{2.01}$

   (a) con error menor que $1/200$
   (b) con error menor que $1/5000$

9. Sea $f(x, y) = xe^y$.

   (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (1, 0)$.
   (b) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0,98; 0,02)$. Estimar el error cometido.

10. Obtener la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para valores suficientemente pequeños de $|x|, |y|$.

11. (a) Calcular el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $(1,1)$ de la función $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

    (b) Usar la parte a) para evaluar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1+\frac{1}{10})^2 - (1-\frac{1}{10})^2$. Comprobar que el error que cometió es menor que 0.3

12. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y).$$

13. Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 alrededor del punto $(1,-1,0)$ de la función

$$f(x,y,z) = \frac{\cos(x+y)\operatorname{sen}\left(\frac{yz}{x}\right)}{(2x+y)e^{z+(x^2-y^2)}}$$

14. Dada $f(x,y) = (x+1, 2y - e^x)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, tal que el polinomio de Taylor de grado 2 de $g \circ f$ en $(0,0)$ es

$$4 + 3x - 2y - x^2 + 5xy.$$

    Calcular $\nabla g(1,-1)$.

15. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 en $(0,0)$ de las funciones $f(x,y)$ dos veces diferenciables, que satisfacen la condición:

    (a) $xf(x,y) + yf(x,y) = f(x,y) + 2$

    (b) $x\,f_y(x,y) + y\,f_x(x,y) + 1 = f(x,y)$

    (c) $x\,f_y(x,y) = y\,f_x(x,y)$

    (d) $f_{yx}(x,y) = x + f_x(x,y)$

16. Probar que si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función dos veces diferenciable que satisface $f_x(0,0) = 0$, $f_{xy}(0,0) = 1$ y $f_x(x,y)x = f(x,y)$ para todo valor de x y de y, entonces $f(x,y)$ tiene un punto de ensilladura en $(0,0)$.

Convexidad y extremos

17. (a) Calcular los extremos de $f(x,y) = x^2+y^4$ y de $g(x,y) = x^4+y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

    (b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

18. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:

    (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

    (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$

    (c) $f(x,y) = xy$

    (d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

19. Sea $f(x,y) = (y-3x^2)(y-x^2)$. Probar que:

(a) $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

(b) El determinante de la matriz $Hf(0,0)$ es cero.

(c) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b.

20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

 (a) Probar que $(0,0)$ es un punto crítico pero no extremo.

 (b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1, -1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?

21. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura. Si fuera necesario realice el mapa de gradientes para analizar lo pedido.

 (a) $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$

 (b) $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

 (c) $f(x, y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

 (d) $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$

 (e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$

 (f) $f(x, y) = (x - y)^2 + 1 + 2(x - y)$

 (g) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

 (h) $f(x, y, z) = xy + z^2$

 (i) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$

 (j) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

 (k) $f(x) = \frac{1}{1+||x||^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$

22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0,1) = 0, \nabla f(0,1) = (0,2) \text{ y } Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

 Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x, y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$

 (a) Calcular $Hg(0,1)$

 (b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?

23. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x, y) = e^{y^4 - x^2} + a(x - y) + b(x - 2)(y - 1)$$

 tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

24. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar.

(a) Si el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 1 + x - y + x^2 + y^2$$

entonces $f(x,y)$ es convexa en $\mathbb{R}^2$.

(b) Si el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x,y)$ en $(0,0)$ es

$$P(x,y) = 1 + 2x - y + xy - x^2 + y^2$$

entonces

$$g(x,y) = f(x,y) - 2x + y + x^2 y$$

tiene un mínimo local en $(0,0)$.