Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Verano - 2010

# Práctica 3: Diferenciación I

## Derivadas parciales y direccionales

1. Sea $f$ una función continua en $x = a$. Probar que $f$ es derivable en $x = a$ si y solo si existe una única función afín $L(x) = m(x - a) + b$ tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - L(x)}{x - a} = 0.$$

Calcular el valor de $m$ y de $b$. Al gráfico de $L(x)$ se la denomina la **recta tangente** a $f(x)$ en $x = a$.

2. Para cada una de las siguientes funciones $f(x, y)$, calcular la derivada $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$

   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \quad v = (1, 0),\ (x_0, y_0) = (1, 2)$ y $v = (0, 1),\ (x_0, y_0) = (1, 2)$.

   (b) $f(x, y) = 2xy - 3x^2 + y - 5 \quad v = (1, 1),\ (x_0, y_0) = (2, 3)$ y $v = (1, 2),\ (x_0, y_0) = (0, 1)$

   (c) $f(x, y, z) = e^z(xy + z^2) \quad v = (0, 1, 0),\ (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 2)$.

   (d) $f(x, y) = (x + 1)\operatorname{sen} y - 2 \quad v = (1, 0),\ (x_0, y_0)$ cualquiera.

   (e) $f(x, y) = ||(x, y)|| \quad v = (a, b),\ (x_0, y_0) = (0, 0)$ con $||(a, b)|| \neq 0$.

3. (a) Sea $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ y $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1)$.

   (b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$ para $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$

   (c) Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
   Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ para todo vector unitario $v$.

4. Calcular las funciones derivadas parciales de las siguientes funciones

   (a) $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$;

   (b) $f(x, y, z) = ye^x + z$;

   (c) $f(x, y) = x^2\operatorname{sen}^2(y)$;

   (d) $f(x, y) = \operatorname{sen} x$;

   (e) $f(x, y, z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1))$;

   (f) $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$;

   (g) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$.

5. Probar que la función $f(x, y) = |x| + |y|$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

6. Consideremos la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Probar que las únicas direcciones $v \in \mathbb{R}^2$ para las que existe la derivada direccional $f_v$ en el origen son $v = (1,0)$ y $v = (0,1)$. Probar, además, que la función no es continua en el origen.

7. Consideremos la siguiente función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Probar que $f$ admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, $f$ tampoco es continua en el origen.

8. Sea $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

   (a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

   y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

   (b) Mostrar que $f$ es continua en $(0,0)$.

## Curvas en $\mathbb{R}^n$

9. Graficar las curvas definidas por $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$.

   (a) $\sigma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$.

   (b) $\sigma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$.

10. Graficar las curvas definidas por $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Donde

    (a) $I = [0, 4\pi]$ y $\sigma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$;

    (b) $I = [-1, 2]$, y $\sigma(t) = (1, 1, t)$;

    (c) $I = [-1, 2]$ y $\sigma(t) = (1, 1, t^2)$;

    (d) $I = [-3, 3]$ y $\sigma(t) = (1, t^2, t)$;

    (e) $I = [0, 1]$ y $\sigma(t) = t(1, 1, 0) + (1 - t)(1, 0, 5)$.

11. Calcular la derivada de $\sigma$ en $t = t_0$. Encontrar la ecuación de las rectas tangentes a la curva imagen de $\sigma$ en $\sigma(t_0)$.

    (a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3)$, $\quad t_0 = 0$

    (b) $\sigma(t) = (\cos(2t), 3t - t^3, t)$, $\quad t_0 = 0$

(c) $\sigma(t) = (\text{sen}(3t), \cos(3t), 2t), \quad t_0 = 1$

12. Hallar una parametrización $\sigma(t)$ de cada una de las curvas dadas en cada uno de los siguientes conjuntos

(a) $\{(x, y)/y = e^x\}$

(b) $\{(x, y)/4x^2 + y^2 = 1\}$

(c) $\{(x, y, z)/x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,\ z = x^2 + y^2,\ z \neq 0\}$

## Diferenciabilidad

13. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

(a) $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$

(b) $f(x, y) = \begin{cases} x\text{sen}\left(4\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\text{sen}\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

14. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Probar que en el origen $f$ es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero $f$ no es diferenciable.

15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $v = (a, b)$ y $\mathbb{L} : (x, y) = tv + (x_0, y_0)$. Supongamos además que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$. Probar que una ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva definida por

$$\sigma(t) = (ta + x_0, tb + y_0, f(ta + x_0, tb + y_0))$$

en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por

$$\mathbb{L}_1 : (x, y, z) = t\left(a, b, \tfrac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)\right) + (x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

16. Sea $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$

(a) Encontrar ecuaciones paramétricas de las rectas tangentes a las siguientes curvas en $t_0 = 0$:

$$\sigma_1(t) = (t+1, 3, f(t+1,3)) \quad \text{y} \quad \sigma_2(t) = (t+1, t+3, f(t+1, t+3)).$$

(b) Encontrar la ecuación de un plano $z = T(x,y)$ que contenga ambas rectas y mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x,y) - T(x,y)}{||(x,y) - (1,3)||} = 0.$$

17. Sea $f(x,y)$ diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Probar que $f$ es homogénea de grado 1 (es decir: $\forall t > 0$ y $\forall (x,y) \neq (0,0) :\ f(t(x,y)) = tf(x,y))$ si y solo si

$$\nabla f(x,y) \cdot (x,y) = f(x,y) \quad , \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

18. Sea $f$ diferenciable en $(1,2)$ tal que $f(1,2) = 3$, y sean además los vectores $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$. Se sabe que $\frac{\partial f}{\partial v_1}(1,2) = 3$ y que $\frac{\partial f}{\partial v_2}(1,2) = 4$.

(a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

(b) Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de $f$ en $(1,2,f(1,2))$.

19. Estudiar la existencia de plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos indicados. Si existe, escribir su ecuación.

(a) $f(x,y) = xy + 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1,5)$ y en $(2,2)$.

(b) $f(x,y) = x^{1/4}y^{1/4}$ en $(0,0)$ y en $(16,1)$.

(c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ en $(x_0,y_0)$ con $y_0 \neq 0$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ y en $(1,0)$.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ y en $(-1,1)$.

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^3 + x^2(y^2-6y+7) + (y-1)^2(6x+12-8y)}{x^2+2(y-1)^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,1) \\ 2 & \text{si} \quad (x,y) = (0,1) \end{cases}$ en $(0,1)$.

20. Usando la expresión del plano tangente para una función $f$ adecuada, aproximar $(0,99e^{0,2})^8$.

21. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justificar la respuesta.

(a) Una función afín $f(x,y) = ax + by + c$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ es diferenciable en todo punto.

(b) El plano tangente de la función $f(x,y) = x^2 - xy + y^3$ en el punto $(1,1)$ contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x,y,z) = (1,1,1) + t(2,1,-1)$$

(c) Si la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $(2,-1)$ con plano tangente

$$z = 2x - 3y + 2$$

entonces la función $g(x,y) = 3x - 2f(x,y) + 5$ es diferenciable en el punto $(2,-1)$ con plano tangente

$$z = -x + 6y + 1$$

(d) El plano tangente de la función $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + y^3$ en el punto $(1,2)$ contiene a la recta con ecuación paramétrica

$$(x,y,z) = (2,0,1) + t(1,-1,4)$$

(e) Si la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $(0,1)$ y el plano tangente en el punto $(0,1)$ de la función $g(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $z = 0$ entonces la función $h(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) = f(x,y)\ g(x,y)$$

es diferenciable en el punto $(0,1)$.

(f) Si la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en el punto $(0,0)$ entonces la función

$$g(x,y) = (x^2 + y^2)f(x,y)$$

es diferenciable en el punto $(0,0)$ y su plano tangente es $z = 0$.

## Interpretación geométrica del vector gradiente

22. Encontrar la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1,1)$. ¿Cuál es la magnitud $||\nabla z||$ en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.

23. Supongamos que la función $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición $(x,y)$. Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano $xy$ son iguales a $(1,0)$. ¿En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?

24. (a) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual $f$ decrece más rápidamente.

    (b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función

    $$f(x,y) = 10 + 6\cos(x)\cos(y) + 4\cos(3y)$$

    En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encontrar las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

25. Dada la función $f(x,y) = x^3 - xy^2 + y^4$, verificar cada una de las siguientes afirmaciones:

    (a) $f$ crece en la dirección $(0,1)$ desde el punto $(1,1)$.

    (b) Desde el punto $(1,1)$ el mayor crecimiento de $f$ se da en la dirección $(2,2)$.

    (c) Desde el punto $(1,1)$, $f$ decrece si nos movemos en la dirección $(-1,0)$.

    (d) Desde el punto $(1,1)$ crece en la dirección $(0,1)$

## Generalización a varias variables

26. Calcular el gradiente de $f$ para

    (a) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + z^2$,

    (b) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$,

    (c) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

27. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x,y) = (x+y, x-y, 2x+3y)$

    (a) Verificar que $T$ es una transformación lineal y calcular su matriz asociada (en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).

    (b) Calcular la matriz de la diferencial $DT(a)$ para $a \in \mathbb{R}^2$. Verificar que es la misma matriz que la hallada en (a).

28. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal.

    (a) Supongamos que $T$ verifica

    $$\lim_{v \to \overrightarrow{0}} \frac{||Tv||}{||v||} = 0,$$

    donde $\overrightarrow{0}$ denota el vector nulo de $\mathbb{R}^m$. Probar entonces que $T$ es la transformación lineal nula, es decir, para cada $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $T(w) = \overrightarrow{0}$.

    (b) Asumiendo que $T$ es diferenciable, deducir que para cada $a \in \mathbb{R}^n$ la diferencial $DT(a)$ es igual a $T$.

29. Para cada una de las siguientes funciones, calcular $DF(a)$ para $a$ en el dominio de $F$.

    (a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x,y)$

    (b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

    (c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = (x + e^z + y, yx^2)$

    (d) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) = ||x||^2$