

Práctica 1: Preliminares

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} a) |x + 3| < 1 & b) |3x - 1| < |x - 1| & c) |x - 3| \geq 1 \\ d) |x| > |x + 3| & e) \left| \frac{x - 2}{3x + 1} \right| \leq 1 & \end{array}$$

2. Representar los siguientes conjuntos en \mathbb{R} :

$$\begin{array}{ll} a) \{x : |x - 1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\} & b) \{x : |x - 3| < |2 - x|\} \\ c) \{x : 0 < x^2 \leq x^3\} & \end{array}$$

3. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

$$\begin{array}{l} (a) A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\}; \\ (b) B = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\}; \\ (c) C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}. \end{array}$$

4. Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{ll} a) |a + b| = |a| + |b| & b) |a + b| < |a| + |b| \\ c) |a - b| = |a| + |b| & d) |a - b| < |a| + |b| \\ e) ||a| - |b|| = |a - b| & f) ||a| - |b|| < |a - b| \end{array}$$

5. Sean a y b números reales. Decidir para qué valores de a y de b son válidas cada una de las siguientes afirmaciones

$$\begin{array}{ll} a) a < a^2 & b) a < b \Rightarrow a^2 < b^2 \\ c) a > 0 \Rightarrow ab \geq b. & d) a + b \geq \max\{a, b\} \end{array}$$

6. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

7. (a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:

- i. $\mathbb{R}_{>0}$;
 ii. $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.
- (b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:
- i. \mathbb{Z} ;
 ii. $\{x^{-1} : x < 0\}$;
 iii. $\text{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.
8. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:
- a) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \text{ y } 20 < n \leq 35\}$ b) $A = \{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
 c) $A = \{\frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$ d) $A = \{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$
9. (a) Considerar el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$. Calcule su supremo y concluya que A no tiene máximo.
 (b) Dado el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\} \subset \mathbb{R}$, calcule su ínfimo y concluya que B no tiene mínimo.
10. Calcular
- a) $\sup \{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ b) $\sup \{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$
 c) $\inf \{\frac{n-3}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ d) $\inf \{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$
11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo):
- (a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ entonces $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.
 (c) Si $a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$.
 (d) Si $a_n < 2 - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$.
12. Calcular $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$ y determinar, para cada $\varepsilon > 0$ de la siguiente tabla, un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $|\frac{n+1}{n} - \ell| < \varepsilon$ si $n > n_0$.

ε	0,1	0,027	0,00001	10^{-6}
n_0				

13. Dadas las sucesiones

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Probar que:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.

Sugerencia: Notar que a_n y b_n constan de $n + 1$ términos. Usar el principio de comparación.

14. Sea $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$.

(a) Encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que $3 < a_n < 5$.

(b) Encontrar, si existen, $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

15. Probar que toda sucesión convergente es acotada.

16. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado y sea $s = \sup(A)$. Probar que existe una sucesión a_n contenida en A que converge a s . Probar el resultado análogo para el ínfimo de A .

17. Sea a_n una sucesión monótona acotada. Probar que a_n es convergente.

18. Considerar la sucesión

$$a_1 = \alpha \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{Q}, 0 < \alpha < 1 \text{ fijo}$$

$$a_{n+1} = \frac{\alpha + a_n}{1 + a_n} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}$$

Probar que la sucesión $\{a_n\}$ satisface:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{Q}$ y $0 < a_n < 1$.

(b) Es monótona creciente, por lo tanto se puede asegurar que tiene límite.

(c) Calcule el límite de la sucesión dependiendo del valor de α . Concluya que dependiendo de α la sucesión $\{a_n\}$ puede converger a un número racional o a uno irracional (por ejemplo considere los casos $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\alpha = \frac{1}{4}$).

19. (Aproximación de la raíz cuadrada de $b > 0$.) Dado un número $b > 0$ considerar la sucesión definida de la siguiente manera:

$$a_1 = a > 0 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b}{a_n} \right)$$

- (a) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n > 0$, y por lo tanto la sucesión está acotada inferiormente.
- (b) Probar que independientemente del valor inicial $a_1 = a > 0$ se tiene que para todo $n \geq 2$ vale que $a_n^2 \geq b$, y solo vale la igualdad si $a = \sqrt{b}$.
- (c) La sucesión es decreciente para $n \geq 2$. Concluir que existe el límite de la sucesión.
- (d) Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{b}$.
- (e) Probar usando inducción la siguiente estimación del error:

$$\forall n \geq 2, \quad 0 < a_n - \sqrt{b} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} (a_2 - \sqrt{b})$$

Usar esta estimación para calcular cuantos elementos de esta sucesión se deben por lo menos calcular para obtener una aproximación de $\sqrt{5}$ con error menor a 10^{-6} , partiendo de $a_1 = 2$.

Métricas y topología en \mathbb{R}^n

20. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en \mathbb{R}^2 . Representar las soluciones en el plano.

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$ b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| > 2\}$
- c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
- e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$ f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| \geq 1\}$
- g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} = 1\}$ h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} < 1\}$

21. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se define $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ y $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$. Mostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

- (a) $|x_i| \leq \|x\|_2$, si $i = 1, \dots, n$;
- (b) $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$;
- (c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$. Describir geoméricamente esta doble desigualdad.

Ejercicios adicionales

Los ejercicios que figuran a continuación son optativos.

22. Probar que el número $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
23. Dada la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

- (a) Probar que es una sucesión monótona creciente.
 (b) Comprobar que está acotada inferiormente y calcule el mínimo.
 (c) Usando que $n! > 2^{n-1}$ para todo $n \geq 3$, comprobar que 3 es una cota superior de esta sucesión. Concluir que existe el límite, al que llamaremos e , que cumple $2 < e \leq 3$.

24. Considerar las siguientes sucesiones

$$x_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$y_n = x_n + \frac{1}{n!} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} + \frac{1}{n!}$$

- (a) Verificar que $\{x_n\}$ es una sucesión creciente e $\{y_n\}$ es decreciente. Como además la diferencia $y_n - x_n \rightarrow 0$, concluir que existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ al que llamaremos e' .
 (b) Comprobar que $e' = e$ (donde e es el del ejercicio anterior).

Sugerencia: por un lado es fácil verificar que $a_n < x_n$, de donde se obtiene que $e \leq e'$. Por otro lado, si para cada n fijo consideramos cualquier $m < n$, tenemos que

$$a_n > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)$$

fijando el m y haciendo $n \rightarrow +\infty$ obtenemos

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!} = x_m$$

se concluye tomando $m \rightarrow +\infty$.

- (c) Probar que e es un número irracional.
Sugerencia: suponer que $e = \frac{p}{q}$ y por lo tanto para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n < \frac{p}{q} < y_n$, considerar ahora el caso particular $n = q$ y multiplicar toda la desigualdad por $q!$.

25. Usando el Ejercicio 21 concluir que:

- (a) $\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \|x\|_\infty < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < r\}$.
 (b) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostrar la equivalencia de los siguientes dos enunciados:
 i. A es abierto;
 ii. cualquiera sea $y \in A$, existe $r > 0$ tal que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_\infty < r\} \subseteq A.$$

26. (a) Mostrar que los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son abiertos

- i. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$;
- ii. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$;
- iii. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$.

(b) Dar un ejemplo de un conjunto en \mathbb{R}^3 que no sea ni abierto ni cerrado.

27. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, calcular ∂A , \bar{A} , $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$:

- (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
- (b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge z < 2\}$;
- (c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$;
- (d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 1/2\}$.

28. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son cerrados y acotados:

- (a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
- (b) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- (c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;
- (d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;
- (e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

29. En cada uno de los siguientes casos, encontrar una sucesión de puntos de A que no posea ninguna subsucesión convergente a un punto de A :

- (a) $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$;
- (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$.