

PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

PRÁCTICA 5

1. En una línea de producción los productos pasan por 4 procesos sucesivamente (preparación, armado, control y embalaje) hasta quedar listos para la venta. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 los tiempos que tarda en cumplirse cada uno de los cuatro procesos (en minutos). Se sabe que los cuatro procesos actúan en forma independiente y que $X_1 \sim \mathcal{U}(3, 5)$, $X_2 \sim N(3, 1/4)$, $X_3 \sim \Gamma(6, 3)$, $X_4 \sim \mathcal{U}(2, 4)$. Sea Y la variable aleatoria que mide el tiempo que tarda un producto en pasar por toda la línea de producción. Hallar $E(Y)$ y $V(Y)$.
2. a) Sea X una v.a. con distribución desconocida tal que $E(X) = 5$ y $V(X) = 0,1$. Usando la desigualdad de Tchebyshev, acotar la probabilidad de que X esté entre 4.5 y 5.5.
b) Sea X_1, \dots, X_{10} una muestra aleatoria (v.a. independientes e idénticamente distribuidas), con $E(X_1) = 5$ y $V(X_1) = 0,1$, y sea \bar{X} su promedio. Acotar la probabilidad de que \bar{X} esté entre 4.5 y 5.5.
c) ¿Qué pasa con la cota hallada en (b) cuando el tamaño de la muestra n tiende a infinito?
3. El número de aviones que aterrizan en un aeropuerto sigue un proceso de Poisson con intensidad de 10 aviones cada 20 minutos. Determinar una cota para la probabilidad de que el número de aviones que aterrizan en un período de 1 hora esté entre 20 y 40.
4. Sea p la probabilidad de que una persona elegida al azar apoye la pena de muerte. Para estimar p se encuesta a n personas, se cuenta la cantidad de ellas que apoya la pena de muerte (X) y se define la frecuencia relativa

$$f_n = \frac{X}{n}$$

Cuanto más cerca esté f_n de p , mejor estimador será.

- a) Hallar una cota superior para $P(|f_n - p| > 0,1)$ que no dependa de parámetros desconocidos. ¿Cómo se puede mejorar la estimación?
 - b) ¿A cuánta gente debería encuestarse para estar seguro de que $P(|f_n - p| > 0,1) \leq 0,1$?
5. Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes con $E(X_i) = \mu$ y $Var(X_i) = \sigma_i^2$. Sea $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.
 - a) Probar que si $\sigma_i^2 = \sigma^2 < \infty$ (todas tienen la misma varianza), entonces $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$ en probabilidad.
 - b) Probar que si las varianzas son distintas, pero están acotadas, es decir que existe C tal que $\sigma_i^2 \leq C$ para todo i , entonces $\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$ en probabilidad.
 - c) ¿Es cierto el resultado del ítem anterior si las varianzas no están acotadas?

6. Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $P(\lambda)$. Sea $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$.
- Calcular $E(X_i^2)$. (Recordar que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = 1$).
 - Verificar que $Var(X_i^2)$ es finita.
 - Calcular el límite en probabilidad de Y_n . (Sugerencia: usar la Ley débil de los grandes números).
7. Una empresa láctea produce una cierta variedad de queso en unidades cuyo peso (en kg.) es una v.a. con media 2 y varianza 0.04.

- Calcular en forma aproximada la probabilidad de que 60 quesos pesen más de 122 kg.
- ¿Cuántas unidades serán necesarias para satisfacer un pedido de 5000 kg. con probabilidad mayor o igual que 0.95?.

8. Sea X una v.a. con distribución $Bi(100, 0,8)$. Usando el Teorema Central del Límite (con corrección por continuidad), calcular en forma aproximada:

$$P(75 \leq X \leq 85) \quad P(X \geq 80) \quad P\left(0,7 \leq \frac{X}{100} \leq 0,8\right) \quad P(X = 80)$$

9. Para rellenar una zona baja del río llegan diariamente 3 camiones A, B y C llenos de piedras. Los pesos en toneladas de las cargas de los camiones son v.a. independientes con esperanzas 1.8, 3.8, 4.1 y varianzas 0.1, 0.18, 0.25 respectivamente.
- ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que en 360 días se superen las 3500 t?
 - ¿Cuánto tiempo será necesario para superar las 3500 t con una probabilidad aproximada de 0.90 por lo menos?
10. En cierto juego de azar la probabilidad de ganar es 0.3. Para participar en el mismo se paga un peso y, en caso de ganar, se reciben 5 pesos.

- ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que en 100 juegos independientes un jugador gane más de 90 pesos?
- ¿Cuántas veces tendrá que jugar para ganar más de 90 pesos con probabilidad aproximada mayor o igual que 0.80?

11. Sea U_1, \dots, U_n una muestra aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0, 1]$ y sea h una función continua. Consideremos la integral $I = \int_0^1 h(x) dx$.

- Se define $I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(U_i)$. En base a la Ley de los Grandes Números, explicar por qué I_n puede utilizarse para calcular en forma aproximada el valor de la integral I .

b) Los siguientes datos son una muestra aleatoria de una distribución $\mathcal{U}[0, 1]$:

,635 ,074 ,220 ,746 ,826 ,148 ,821 ,759 ,080 ,929

Usarlos para aproximar

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Comparar el resultado obtenido con el valor exacto de esta integral.

c) Extender el método hallado en (a) para el cálculo aproximado de

$$I = \int_a^b h(x) dx$$

siendo a y b números reales tales que $a < b$.