PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA (C)

Práctica 4

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} k\left(x^2 + y^2\right) & 20 \leq x \leq 30,\ 20 \leq y \leq 30 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   a) ¿Cuál es el valor de k?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que tanto X como Y sean menores que 26?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que $\max(X, Y) < 26$?
   d) Hallar f_X y f_Y, las funciones de densidad marginales.

2. De un grupo de tres profesores, dos graduados y un alumno debe seleccionarse al azar una comisión de dos personas. Sean X el número de profesores e Y el número de graduados en la comisión.

   a) Hallar la función de probabilidad conjunta del par (X, Y) y las marginales de X e Y.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno no forme parte de la comisión?

3. Sea (X, Y) una v.a. bidimensional continua con distribución uniforme en el trapecio de vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$.

   a) Hallar la función de densidad conjunta de (X, Y).
   b) Calcular $P(Y \leq X)$.
   c) Hallar las funciones de densidad marginales f_X y f_Y.

4. En los ejercicios 1 a 3:

   a) Decir si X e Y son independientes (justificando en cada caso).
   b) Hallar las funciones de probabilidad puntual condicional o de densidad condicional, según corresponda.

5. Para iluminar sin interrupción una sala (de computadoras!) se cuenta con dos lamparitas; cuando se quema una, se coloca la otra. Sean X e Y los tiempos de vida de cada lamparita (en 10^3 horas) y supóngase que esos tiempos son independientes y tienen distribución $\mathcal{E}(1)$.

   a) Hallar la densidad conjunta de (X, Y).
   b) Hallar la probabilidad de que la sala permanezca iluminada al menos 2000 horas.

6. Dos servidores A y B procesan trabajos a medida que van llegando. El tiempo que tarda el servidor A en procesar un trabajo es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{E}(\lambda_1)$, mientras que el tiempo que tarda el servidor B es una variable aleatoria $Y \sim \mathcal{E}(\lambda_2)$. Ambos servidores actúan en forma independiente. Dos trabajos llegan simultáneamente y es atendido uno por A y otro B. ¿Cuál es la probabilidad de que el servidor A termine con su trabajo antes que B?

7. Retomemos el problema anterior y supongamos que tres trabajos llegan simultáneamente. Uno es atendido por A, otro por B y el tercero queda esperando a que uno de los servidores se libere. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, pruebe que la probabilidad de que el último trabajo en ser atendido sea el último en ser completado es 0.5.

8. Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo X el número de caras. Si $X = a$ se extraen sin reposición $a + 1$ bolillas de una urna que contiene 4 bolillas blancas y una roja. Sea Y el número de bolillas rojas extraídas.

   a) Hallar la distribución de Y dado $X = a$, para $a = 0, 1, 2, 3$.
   b) Obtener una tabla con la distribución conjunta del par (X, Y) y hallar la función de probabilidad puntual marginal p_Y.
   c) ¿Son X e Y independientes?
   d) Si se extrajeron 2 bolillas blancas, ¿cuál es la probabilidad de que hayan salido dos caras?

9. Alicia y José acordaron encontrarse a las 8 de la noche para ir al cine. Como no son puntuales, se puede suponer que los tiempos X e Y en que cada uno de ellos llega son variables aleatorias con distribución uniforme entre las 8 y las 9. Además se supondrá que estos tiempos son independientes.

   a) ¿Cuál es la densidad conjunta de X e Y?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lleguen entre las 20:15 y las 20:45?
   c) Si ambos están dispuestos a esperar no más de 10 minutos al otro a partir del instante en que llegan, ¿cuál es la probabilidad de que se desencuentren?

10. En los ejercicios 1 a 3, calcular:

    a) $\operatorname{cov}(X, Y)$ y $\rho(X, Y)$.
    b) $E(X + Y)$ y $V(X + Y)$.

11. a) Probar que si X e Y son v.a. independientes entonces $\operatorname{cov}(X, Y) = \rho(X, Y) = 0$.
    b) Mostrar con un ejemplo que la recíproca no es cierta en general.
    (Sugerencia: Sean U y V dos v.a. independientes pero con la misma distribución, por ej.: el resultado de arrojar dos dados. Considerar $X = U + V$ e $Y = U - V$.)
    c) Mostrar que si $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$, entonces $\rho(X, Y) = \pm 1$. ¿Cuándo es $\rho(X, Y) = 1$ y cuándo es -1?

12. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme en la región: $0 \leq x \leq 1, \quad x \leq y \leq x + h$ para todo $0 < h < 1$.

    (a) Calcular $E(X), E(Y), E(XY)$.

    (b) Hallar ρ_{XY}.

    (c) ¿A qué tiende ρ_{XY} cuando h tiende a cero? ¿Por qué?

13. Sea X una variable aleatoria con densidad $\mathcal{U}[0, 1]$. Si $X = x$, se elige un número Y entre 0 y x. Por lo tanto $Y|_{X=x} \sim \mathcal{U}[0, x]$.

    a) Hallar la densidad conjunta del par (X, Y) y la densidad marginal f_Y.

    b) Calcular $E(Y)$, $V(Y)$, $\operatorname{cov}(X, Y)$ y $\operatorname{cov}(X, X + Y)$.

14. Se va a guardar un archivo de longitud 100 caracteres, cada uno de los cuales toma el valor A, B, C ó D. Las probabilidades de ocurrencia de cada uno de estos caracteres son $p_A = 0{,}70$, $p_B = 0{,}12$, $p_C = 0{,}10$ y $p_D = 0{,}08$. Se definen:

    A: número de veces que ocurre la letra A.

    B: número de veces que ocurre la letra B.

    etc. Suponiendo independencia:

    a) ¿Qué distribución tiene el vector aleatorio (A, B, C, D)?

    b) Hallar las distribuciones marginales de A, B, C y D.

    c) Para ahorrar memoria se decide representar estos caracteres según la siguiente tabla basada en el código de Huffman.

Letra	Código
A	1
B	00
C	011
D	010

    Sea X = Tamaño del archivo codificado (en bits).

    d) Hallar $E(X)$.

15. La longitud de ciertas varillas de metal tiene distribución $N(5,\ 0{,}25)$. Para hacer un control de calidad se eligen 40 varillas al azar. Hallar la probabilidad de que 1 varilla mida menos de 4 cm, 13 varillas midan entre 4 y 4.8 cm, 18 varillas midan entre 4.8 y 5.5 cm, y el resto de las varillas mida más de 5.5 cm.

16. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d. (variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas) con función de distribución F_X. Se definen las variables aleatorias

$$\begin{aligned} T &= \max(X_1, \ldots, X_n) \\ U &= \min(X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

    a) Probar que $F_T(t) = [F_X(t)]^n$.

b) Probar que $F_U(t) = 1 - [1 - F_X(t)]^n$.

c) Si las variables X_i tienen densidad $f_X(x)$, hallar las densidades de U y T.

17. En un concurso de salto, cada atleta salta 3 veces, siendo su puntaje la máxima altura alcanzada. Si la altura en cada salto (en metros) es una v.a. con distribución $\mathcal{U}[2, 2{,}5]$ y considerando que las tres alturas alcanzadas son independientes:

a) Hallar la función de distribución del puntaje.

b) Hallar el valor esperado del puntaje.

18. Sean X e Y v.a. independientes, tales que $X \sim\ Bi(n,p)$ e $Y \sim\ Bi(m,p)$. Probar que:

a) $X + Y \sim\ Bi(n + m, p)$.

(NOTA: $\sum\limits_{j=0}^{k} \binom{m}{k-j}\binom{n}{j} = \binom{m+n}{k}$.)

b) La distribución de X condicional a $X + Y = k$ es $\mathcal{H}\,(k, n, m + n)$.

19. Un laboratorio posee 14 ratas de la especie A y 11 de la especie B para experimentación. La probabilidad de que cualquiera de ellas muera en un experimento es 0.1, y se considera que las ratas mueren en forma independiente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que mueran más de 4 ratas?

b) Si murieron 2, ¿cuál es la probabilidad de que ambas hayan sido de la especie A?

20. Sean X e Y v.a. independientes, ambas con distribución $\mathcal{G}(p)$. Probar que $X + Y \sim BN(2, p)$.

21. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a.i.i.d.. Se define $S = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

a) Calcular $E\,(S)$ y $V\,(S)$ para los siguientes casos:
i. $X_i \sim Bi\,(1, p)$.
ii. $X_i \sim \mathcal{G}\,(p)$.

b) Usando los Ejercicios 18 y 20, hallar la distribución de S para los dos casos anteriores.

a) Se tiene un proceso de Poisson de parámetro λ. Sea $X_n =$ Tiempo de espera hasta que ocurren N eventos. Probar que $X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

c) Deducir de (a) y (b) la esperanza y la varianza de variables aleatorias con distribución $Bi\,(n, p)$ y $BN\,(r, p)$.

22. Sean X e Y v.a. independientes tales que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. Probar que:

a) $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

b) La distribución de X condicional a $X + Y = k$ es $Bi\left(k, \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$.

c) Sean X e Y v.a. tales que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y|_{X=k} \sim Bi\,(k,p)$. Probar que $Y \sim \mathcal{P}\,(\lambda p)$.

23. Dos terminales A y B están conectadas a un servidor. La cantidad de requerimientos que realiza la terminal A en el lapso de un segundo sigue una distribución $\mathcal{P}(2)$ mientras que para la terminal B sigue una distribución $\mathcal{P}(3)$. Ambas terminales actúan en forma independiente.

  a) Hallar la probabilidad de que en un segundo haya más de 3 requerimientos al servidor.

  b) Si en un determinado segundo hubo dos requerimientos al servidor, ¿cuál es la probabilidad de que haya provenido uno de cada terminal?

  c) Si el 30 % de los requerimientos necesita grabar en disco (y el 70 % restante no), hallar el valor esperado para la cantidad de requerimientos de disco en el lapso de 15 segundos.