ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Curso de Verano 2007

Práctica 5 - Subespacios y rango de matrices

1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial dado:

   (a) $S \subset \mathbb{R}^2$; $\quad S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 2x_2 = 0\}$.

   (b) $S \subset \mathbb{R}^2$; $\quad S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$.

   (c) $S \subset \mathbb{R}^2$; $\quad S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 < -1\}$.

   (d) $S \subset \mathbb{R}^3$; $\quad S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_2 = 0\}$.

   (e) $S \subset \mathbb{R}^3$; $\quad S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 4x_2 \geq 0\}$.

2. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real y sean v_0, v_1 y $v_2 \in \mathbb{V}$.

   (a) Probar que $S = \{t \cdot v_0 :\ t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

   (b) Probar que $T = \{s \cdot v_1 + t \cdot v_2 :\ s, t \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$.

   (c) Describir geométricamente los subespacios S y T.

3. Se consideran los vectores $v_1 = (2, 3)$ y $v_2 = (1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$. Determinar si $u = (1, 2)$ es combinación lineal de v_1 y v_2. ¿Qué sucede con $w = (0, 0)$?

4. Analizar si $v \in S$ o no en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $S = \langle (1, 2, 3) \rangle$; $\quad v = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, \frac{9}{5})$.

   (b) $S = \langle (1, 2, 3),\ (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \rangle$; $\quad v = (-5, -10, -15)$.

   (c) $S = \langle (1, -1, 2, 1),\ (2, 1, 3, 0) \rangle$; $\quad v = (0, -3, 1, 1)$.

5. En cada caso, hallar dos subespacios distintos de $\mathbb{R}^3$ con las condiciones:

   (a) que contenga al vector $v = (1, 2, 3)$.

   (b) que contenga al vector $v = (1, 1, 0)$ y no contenga al vector $w = (0, 1, 1)$.

6. Analizar si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^n$ o no:

   (a) $n = 2,\ \{(1, 1),\ (1, -1)\}$.

   (b) $n = 2,\ \{(1, 1),\ (1, -1),\ (3, 4)\}$.

   (c) $n = 3,\ \{(1, 1, -1),\ (0, 1, 1),\ (1, 2, 0)\}$.

   (d) $n = 3,\ \{(1, 1, -1),\ (0, 1, 1),\ (1, 2, 1),\ (3, 2, 1)\}$.

   (e) $n = 4,\ \{(1, 1, 1, -1),\ (0, -1, 1, -2),\ (1, 1, 0, 1),\ (3, 2, 1, 2)\}$.

7. Analizar la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores.

   (a) $\{(1, -3, 5),\ (-2, 2, 1),\ (-1, -1, 6)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

   (b) $\{(1, 2, 2, -1),\ (0, 2, -2, -3),\ (1, 1, 0, 2),\ (0, 1, -1, 0)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.

   (c) $\{v\}$ con $v \in \mathbb{V}$.

   (d) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, 0\}$ con $v_1, v_2, \ldots v_n, 0 \in \mathbb{V}$.

8. Hallar (si es posible) tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes de manera tal que dos cualesquiera de ellos sean linealmente independientes.

9. Determinar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los siguientes conjuntos de vectores resultan linealmente independientes en $\mathbb{V}$:

   (a) $\{(1, -1, 2), (k+1, k, k+6), (k, k+1, 1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

   (b) $\{(k-2, k, 1, 0), (0, k, 0, 0), (1, 1, 0, k-1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^4$.

10. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son una base del espacio $\mathbb{V}$. En el caso que no sean base, analizar la posibilidad de extraer una base o bien de extender el conjunto a una base de $\mathbb{V}$.

    (a) $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

    (b) $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

    (c) $\{(1, 1, 2), (0, 1, 1), (2, 3, 3)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

    (d) $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

    (e) $\{(1, 1, 1, 1, 1), (1, 2, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 2, 1)\}$; $\mathbb{V} = \mathbb{R}^5$.

11. Hallar bases y determinar la dimensión de cada uno de los siguientes subespacios:

    (a) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 = 0, \ x_3 - x_2 = 0\}$.

    (b) $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ x_1 - 2x_3 + x_5 = 0, \quad 2x_1 + x_4 - 2x_5 = 0, \quad 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$.

    (c) $S = \langle (1, 1, -1), (0, 1, 1), (1, 2, 0) \rangle$.

12. Sea $S = \langle (0, -1, k), (1, -1, 0), (-1, 0, 2) \rangle$. Estudiar la dimensión y dar una base del subespacio S en función de k.

13. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^3$, $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\}$ y $T = \langle (2, 3, -1), (-2, 1, 5), (4, 2, -6) \rangle$:

    (a) Probar que $T \subset S$.

    (b) Calcular $\dim(S)$, $\dim(T)$ y decidir si vale la igualdad $T = S$ o no.

14. En cada uno de los siguientes casos, hallar bases de S, T, $S \cap T$ y $S + T$. ¿Qué relación existe entre las dimensiones de estos cuatro subespacios?

    (a) $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ x_1 - x_2 = 0\}$,
    $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 0, \ x_2 - x_4 = 0, \ x_1 - x_3 + x_4 = 0\}$.

    (b) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, $\quad T = \langle (1, 1, 1), (0, -2, 0) \rangle$.

    (c) $S = \langle (-1, 2, -1, 2), (1, -1, 0, 1), (0, 1, -1, 2) \rangle$,
    $T = \langle (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1), (1, 1, 2, 0) \rangle$.

15. Para los subespacios $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \langle (2, -1, -1, 3), \ (1, 1, 0, -2), \ (4, 1, -1, -1) \rangle$:

    (a) Hallar una base $\mathcal{B}_1$ del subespacio $S \cap T$.

    (b) Extender la base $\mathcal{B}_1$ a una base de S. Hacer lo mismo para una base de T.

    (c) Hallar una base $\mathcal{B}_2$ del subespacio $S + T$ que contenga una base de S y una base de T. Extender $\mathcal{B}_2$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

16. Sean $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0, -2x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ y $T = \langle (0, 1, 2, 0), \ (1, 2, 0, \lambda) \rangle$.

    (a) Hallar todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $S \cap T \neq \{0\}$.

    (b) Para cada valor λ hallado en (a), encontrar una base de $S \cap T$.

17. Sean S y T subespacios de $\mathbb{R}^6$ tales que $\dim(S) = 3$ y $\dim(T) = 4$.

   (a) Decidir si las siguientes situaciones son posibles o no:
   (i) $S \subset T$. (ii) $\dim(S + T) = 7$. (iii) $\dim(S \cap T) = 4$. (iv) $S \cap T = \{0\}$.

   (b) Si $\dim(S \cap T) = 3$, ¿qué puede decirse de S y T?

   (c) Si $\dim(S + T) = 4$, ¿qué puede decirse de S y T?

18. Dadas las matrices

$$A = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 1), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & -5 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$$

   (a) hallar una base y la dimensión del espacio fila, del espacio columna y del núcleo.

   (b) calcular el rango.

   (c) repetir los ítems (a) y (b) para las respectivas matrices transpuestas.

19. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

   (a) Si $m = 7$, $n = 8$ y $\mathrm{rg}(A) = 2$, calcular $\dim(N(A))$.

   (b) Si $m = 6$, $n = 5$ y $\dim(N(A)) = 3$, calcular $\mathrm{rg}(A)$.

   (c) Si $m = 3$, $n = 5$ y $\dim(E_C(A^t)) = 3$, calcular $\mathrm{rg}(A)$ y $\dim(N(A))$.

20. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

   (a) Hallar una base y la dimensión de $E_C(A)$.

   (b) Calcular $\dim(N(A))$, $\dim(N(A^t))$, $\dim(E_F(A))$, $\mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A^t)$.

21. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ una matriz tal que $\dim(N(A)) = 1$ y sea $b \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$. Determinar el rango de la matriz ampliada $[A|b] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ para que el sistema $A \cdot x = b$ tenga solución.

22. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & b \end{pmatrix}$.

   (a) Determinar el valor de $b \in \mathbb{R}$ que hace que $\mathrm{rg}(A) = 2$.

   (b) Para el valor de b hallado, decidir si $v = (3, 2, 2) \in E_C(A)$ y hallar una base de $N(A^t)$.

23. Sea $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ y sean $B \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ y $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ dos matrices tales que $(A \cdot B) \cdot C = C \cdot (A \cdot B) = I$.

   Calcular $\mathrm{rg}(A \cdot B \cdot A)$ y $\dim(N(A \cdot B \cdot A))$, y hallar una base de $N(A \cdot B \cdot A)$.

24. Sean $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y S el sistema $S : \begin{cases} ax + y + bz &= 0 \\ 2ax - y + bz &= 0 \end{cases}$.

   Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el subespacio $N(A)$ coincida con el espacio de soluciones de S.

25. Para cada uno de los siguientes subespacios S, hallar $m, n \in \mathbb{N}$, y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tales que $N(A) = S$.

    (a) $S = \langle (1,3,1), (-2,1,0) \rangle$.

    (b) $S = \langle (1,3,1,-2), (-2,1,0,3), (-1,4,1,1) \rangle$.

26. Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - 2x_2 + x_3 = -x_1 + 2x_2 + (\alpha+2)x_3 + x_4 = 0\}$ y $T = \{x \in \mathbb{R}^4 : -x_1 + (\alpha^2 - 7)x_2 - x_3 + 2x_4 = x_1 + (\alpha^2 - 11)x_2 + (2\alpha + 7)x_3 + 2x_4 = 0\}$:

    (a) Calcular $\dim(S \cap T)$ es términos del valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

    (b) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 1$, hallar una base de $S \cap T$.

    (c) Para cada α tal que $\dim(S \cap T) = 2$, hallar una base de $S + T$.