

ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO (B) - Curso de Verano 2007

Práctica 1 - Operaciones vectoriales

- Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 3)$ y $\vec{w} = (-1, -2)$ calcular analítica y gráficamente las siguientes operaciones:
 - $\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{v} + \vec{w}$.
 - $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$; $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
 - $3\vec{u} + 3\vec{v}$; $3(\vec{u} + \vec{v})$.
 - $\vec{u} - \vec{v}$.
- Sea $\vec{w} = (1, 3) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano:
 - $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}\}$.
 - $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$.
 - $L = \{t \cdot \vec{w} : t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\}$.
- Dados los vectores $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (-1, 1, 1)$ calcular las operaciones:
 - $\vec{u} + \vec{v}$.
 - $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.
 - $\vec{u} - \vec{v}$.
 - $2\vec{u}$.
 - $-3\vec{w}$.
 - $-\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w}$.
- En el bioterio observamos que el día primero de julio había 322 ratas de cepa α , 148 de cepa β y 290 de cepa γ . Durante el mes de julio se produjeron 104 nacimientos de cepa α , 48 de cepa β y 110 de cepa γ . A su vez murieron 220 animales, repartidos ordenadamente en 79 de la primera cepa, 51 de la segunda y 90 de la última cepa. Calcular el vector PI de población inicial, el vector N_7 de natalidad durante julio, el vector M_7 de mortalidad durante el mismo mes y el vector PF de población final al terminar el mes.
- Calcular analítica y gráficamente el punto medio entre $P = (1, 4)$ y $Q = (3, 2)$.
- Dados los puntos $A = (1, 7, 3)$, $B = (-1, 3, 0)$ y $C = (3, -4, 11)$ determinar:
 - los vectores $\overrightarrow{AB} = B - A$ y $\overrightarrow{BC} = C - B$.
 - el punto medio entre los puntos A y B .
- Dados los vectores $\vec{v} = (1, -2, 2)$, $\vec{w} = (2, 0, 3)$ y $\vec{z} = (4, 4, 4)$ realizar las operaciones:
 - $\vec{v} \cdot \vec{w}$; $\vec{w} \cdot \vec{v}$.
 - $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{z}$; $(\vec{v} \cdot \vec{z}) + (\vec{w} \cdot \vec{z})$.
 - $(3\vec{v}) \cdot \vec{w}$; $3(\vec{v} \cdot \vec{w})$.
 - $\vec{v} \cdot \vec{v}$; $\vec{w} \cdot \vec{w}$.
- Calcular el módulo (o norma) de los vectores de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 según corresponda:
 - $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-1, -2)$, $\vec{w} = (-3, 4)$, $\vec{z} = (\frac{-3}{5}, \frac{4}{5})$.
 - $\vec{u} = (0, 1, 2)$, $\vec{v} = (-1, 1, 1)$, $\vec{w} = (0, 1, 2) + (-1, 1, 1)$.
 - $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = -2 \cdot (2, -1, 3)$, $\vec{w} = 2 \cdot (2, -1, 3)$.
- Normalizar cada uno de los vectores del ejercicio anterior.

10. Determinar la distancia entre los siguientes pares de puntos:
- (a) $A = (1, -3)$; $B = (0, 0)$. (c) $C = (1, 2, 3)$; $D = (4, 1, -2)$.
(b) $A = (1, -3)$; $B = (4, 1)$. (d) $C = (4, -2, 6)$; $D = (3, -4, 4)$.
11. Determinar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ que verifican:
- (a) $\vec{v} = (4, k)$ y $\|\vec{v}\| = 5$.
(b) $\vec{v} = (1, k, 0)$ y $\|\vec{v}\| = 2$.
(c) $\vec{v} = k \cdot (2, 2, 1)$ y $\|\vec{v}\| = 1$.
(d) $A = (1, 1, 1)$, $B = (k, -k, 2)$ y $d(A, B) = 2$.
12. Sea $C = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Graficar en el plano los siguientes conjuntos:
- (a) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| = 1\}$. (c) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| = 1\}$.
(b) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A\| \leq 1\}$. (d) $S = \{A \in \mathbb{R}^2 : \|A - C\| \leq 1\}$.
13. Determinar si los siguientes pares de vectores son ortogonales (perpendiculares) o no:
- (a) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (-2, 2)$. (c) $\vec{v} = (1, 1, 1)$; $\vec{w} = (1, 0, 1)$.
(b) $\vec{v} = (2, -3)$; $\vec{w} = (0, 0)$. (d) $\vec{v} = (1, -2, 4)$; $\vec{w} = (-2, 1, 1)$.
14. Hallar:
- (a) Tres vectores en el plano, distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (2, 3)$.
¿Qué relación encuentra entre los vectores hallados? Graficar.
(b) Todos los vectores de \mathbb{R}^2 que son ortogonales a $\vec{v} = (2, -2)$ y tienen norma 1.
(c) Tres vectores de \mathbb{R}^3 , distintos entre sí, que sean ortogonales al vector $\vec{v} = (1, 3, -4)$.
(d) Un vector de \mathbb{R}^3 que sea ortogonal a $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ y de norma 2. ¿Es único?
(e) Dos vectores ortogonales a $\vec{v} = (3, 2, 7)$ que no sean colineales (es decir, que no sean uno múltiplo del otro).
15. Hallar el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:
- (a) $\vec{v} = (1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1)$. (c) $\vec{v} = (1, 2)$; $\vec{w} = (-2, 1)$.
(b) $\vec{v} = (1, 1)$; $\vec{w} = (0, 1)$. (d) $\vec{v} = (1, -1, 0)$; $\vec{w} = (0, 1, 1)$.
16. Dados $\vec{u} = (3, 2, -1)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ determinar:
- (a) el ángulo entre ambos vectores.
(b) el módulo de \vec{u} , \vec{v} y $\vec{u} - \vec{v}$.
17. Sean \vec{u} y \vec{v} en \mathbb{R}^3 dos vectores que verifican $\|\vec{u}\| = 1$ y $\|\vec{v}\| = 3$. ¿Es posible que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$? Justificar.
18. Calcular el producto vectorial $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ para los siguientes pares de vectores:
- (a) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$. (c) $\vec{u} = (2, 1, -3)$; $\vec{v} = (1, -2, -4)$.
(b) $\vec{u} = (1, -2, -4)$; $\vec{v} = (2, 1, -3)$. (d) $\vec{u} = (2, 0, 0)$; $\vec{v} = (0, 0, 3)$.
- En cada caso, verificar que \vec{w} es ortogonal tanto a \vec{u} como a \vec{v} .
19. Sean $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-1, 5, 2)$, $\vec{w} = (1, 2, 4)$ y $\vec{z} = (2, -4, 8)$. Hallar en \mathbb{R}^3 :
- (a) un vector no nulo que sea, simultáneamente, ortogonal a \vec{u} y \vec{v} . ¿Es único?
(b) todos los vectores que son, simultáneamente, ortogonales a \vec{w} y \vec{z} .
(c) un vector de norma 2 que sea, simultáneamente, ortogonal a \vec{w} y \vec{z} . ¿Es único?