

Análisis I - Práctica 7

Verano 2007

Derivadas y Diferenciabilidad en \mathbb{R}^n

1. Calcule las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2 :

$$(a) f(x, y) = x^3y + e^{xy^2} \quad (d) f(x, y) = \arctan(x^3 - 2xy)$$

$$(b) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln(z)$$

$$(c) f(x, y) = x^2e^{\frac{y}{x}} + y^2 \quad (e) f(x, y, z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy \sin(z)$$

2. Supongamos que f es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 y que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y)$. Probar que

$$f(x, y) = g(x) + h(y)$$

3. (a) Encuentre todas las funciones f tales que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$.
(b) Encuentre todas las funciones f tales que

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \equiv 0 \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : |\alpha| = k (k \in \mathbb{N}, \text{fijo})$$

4. Sean $f(x, y) = \cos(xy)$, $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = u - v$.

$$\text{Calcule } \frac{\partial^2}{\partial u^2} f(x(u, v), y(u, v)) \text{ y } \frac{\partial^3}{\partial u \partial y^2} f(x(u, v), y(u, v))$$

- (a) Sustituyendo
(b) Usando la regla de la cadena.

5. *Laplaciano - Función armónica*

Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación de Laplace o bien que es una función armónica en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

Verifique que las siguientes funciones son armónicas en $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Determine U en cada caso:

$$(a) f(x, y) = x^2 - y^2 \quad (c) f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$(b) f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$$

6. Sean f, g dos funciones C^2 definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Pruebe que f y g son armónicas en U .

7. Calcule la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escriba la forma de Lagrange del residuo.

- (a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$ (e) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ en $(2, 3)$
 (b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$ (f) $f(x, y) = x + xy + 2y$ en $(1, 1)$
 (c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0, 0)$
 (d) $f(x, y) = \sin(xy)$ en $(1, \pi)$ (g) $f(x, y) = x^y$ en $(1, 2)$

8. Utilizando los resultados anteriores calcule $(0.95)^{2.01}$

- (a) con error menor que $1/200$
 (b) con error menor que $1/5000$

9. Obtenga la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para valores suficientemente pequeños de $|x|, |y|$.

10. (a) Calcule el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $(1, 1)$ de la función $f(x, y) = e^{x^2-y^2}$

(b) Use la parte a) para evaluar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1 + \frac{1}{10})^2 - (1 - \frac{1}{10})^2$. Compruebe que el error que cometió es menor que 0.3

11. Calcule el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$.

12. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones y analice cuáles son puntos de ensilladura:

- (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$
 (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$
 (c) $f(x, y) = xy$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

En cada caso analice si puede haber extremos que no sean puntos críticos. Si los hay, encuéntrelos.

13. (a) Calcule los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^4$ y de $g(x, y) = x^4 + y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

(b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

14. Sea $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Pruebe que:

- (a) $(0, 0)$ es un punto de ensilladura.
 (b) $D(Hf(0, 0)) = 0$.
 (c) f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ sobre cada recta que pase por $(0, 0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b .
15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
- (a) Pruebe que $(0, 0)$ es un punto crítico pero no extremo.
 (b) Pruebe que $\pm\sqrt{2}(1, -1)$ son mínimos absolutos.
 (c) ¿Hay máximos relativos?
16. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 no lineal tal que $Df(x_0) \neq 0$. Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:
- $$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x)$$
- (a) Demuestre que x_0 es un punto crítico de g .
 (b) Pruebe que $Hf(x_0) = Hg(x_0)$.
 (c) ¿Qué pasaría con $g(x) = f(x) - Df(x_0)(x - x_0)$?
17. Para las siguientes funciones, encuentre los puntos críticos y analice cuáles son máximos, mínimos locales o puntos de ensilladura:
- (a) $f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$
 (b) $f(x, y) = \sin(x) + y^2 - 2y + 1$
 (c) $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$
 (d) $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$
 (e) $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$
 (f) $f(x, y) = e^{x-y} (x^2 - 2y^2)$
 (g) $f(x, y, z) = xy + z^2$
 (h) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
 (i) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$
18. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0, 1) = 0, \nabla f(0, 1) = (0, 2) \text{ y } Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $g(x, y) = 3x^2y + e^{f(x, y)} - 2y$

- (a) Calcule $Hg(0, 1)$
 (b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0, 1)$?

19. Decida si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x, y) = e^{y^4 - x^2} + a(x - y) + b(x - 2)(y - 1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2, 1)$.

20. Determine los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

(a) $f(x, y) = xy(x - y)^2$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$

(b) $f(x, y) = xy(x - y)^2$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$

(c) $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$

(d) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $A = \mathbb{R}^2$

(e) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

21. Se tiene en el plano un cuadrado cerrado (incluyendo el interior) A de vértices $\{(-1, 0), (1, 0), (1, -2), (-1, -2)\}$.

Encuentre los extremos absolutos de la función $f(x, y) = 2x - y^2$ en el recinto B , donde B es el recinto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\} \cap A$.

22. Encuentre el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1, 0)$ es mínima

(a) Usando multiplicadores de Lagrange

(b) Reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

23. Encuentre los máximos y mínimos de $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ dentro del círculo unitario y en el borde.

24. Encuentre los máximos y mínimos de $f(x, y) = y + x - 2xy$ en el interior y en el borde de $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq \frac{1}{2}\}$.

25. Encuentre los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:

(a) $f(x, y, z) = x - y + z$ $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$

(b) $f(x, y) = \sin(xy)$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 = 1\}$

(c) $f(x, y) = xy$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1\}$

(d) $f(x, y, z) = x + y + z$ $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\}$

26. Resuelva los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

(a) Encontrar la distancia más corta desde el punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$.

- (b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que esté más cerca del origen.
- (c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es $8abc/3\sqrt{3}$.

27. Encuentre la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$.
28. Encuentre el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.
29. Un envase cilíndrico debe tener capacidad de un litro. ¿Cómo debe diseñarse el envase para minimizar el material empleado?
30. Encuentre los puntos más lejanos y cercanos al punto $(0, 0, 2)$ de la esfera de ecuación

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$