

# Análisis I - Práctica 6

Verano 2007

## Derivadas y Diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$

1. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a)  $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$     (f)  $f(x, y) = \int_x^y e^{\sin t} dt$   
(b)  $f(x, y, z) = ye^x + z$     (g)  $f(x, y) = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt$   
(c)  $f(x, y) = x^2 \sin^2(y)$     (h)  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$   
(d)  $f(x, y) = \sin x$     (i)  $f(x, y, z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1))$   
(e)  $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$

2. Calcule

- (a)  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$  para  $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$   
(b)  $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$  para  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$   
(c)  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  para  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. Dadas las funciones

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
$$f_2(x, y) = |x| + |y|$$
$$f_3(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que en el origen

- (a)  $f_1$  es discontinua aunque existen las derivadas parciales.  
(b)  $f_2$  no admite derivadas parciales pero es continua.  
(c)  $f_3$  es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.
4. Estudie la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

- (a)  $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$   
(b)  $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$   
(c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

5. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Muestre que  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ . Sin embargo, para cualquier curva diferenciable  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que pase por el origen una sola vez, se cumple que  $f(\Phi(t))$  es derivable para todo  $t$ .

6. (a) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$$

- Verifique que  $f$  es una transformación lineal y calcule su matriz asociada.
- Calcule la matriz de la diferencial  $Df(x)$ .
- ¿Qué relación hay entre estas dos matrices?

(b) Muestre que lo ocurrido en el ítem anterior vale para cualquier transformación lineal  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

7. Sean  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  las transformaciones lineales dadas por

$$F(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 + x_2, 7x_1 - x_2)$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 - 4x_2, 2x_1 - x_2 + x_3, 5x_2)$$

- Calcule las matrices asociadas a  $F$  y a  $G$ .
- Calcule  $G \circ F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  y su matriz asociada, ¿qué relación hay entre ésta y las halladas en a)? Justifique la respuesta.

8. Si se corta la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con el plano de ecuación  $y = 0$  se obtiene una circunferencia. De la parametrización de la recta tangente a dicha circunferencia en el punto  $(1, 0, 0)$  y en el punto  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

9. Estudie la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos indicados y escriba la ecuación del plano tangente cuando éste exista.

(a)  $f(x, y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$  en  $(1, 5)$  y en  $(2, 2)$ .

(b)  $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/4}$  en  $(0, 0)$  y en  $(16, 1)$ .

(c)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  en  $(x_0, y_0)$  con  $y_0 \neq 0$ .

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ en } (0, 0) \text{ y en } (1, 0).$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ en } (0, 0) \text{ y en } (-1, 1).$$

10. Calcule  $DF(x)$  para las siguientes funciones:

- (a)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (x, y)$
- (b)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$
- (c)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$
- (d)  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \|x\|^2$

11. Calcule el gradiente de  $f$  para

- (a)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2$
- (b)  $f(x, y, z) = xy + xz + yz$
- (c)  $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$

12. Calcule los ángulos formados por el gradiente de la función  $f(x, y) = x\sqrt{3} + y$  en el punto  $(1, 1)$  y los ejes de coordenadas.

13. Determinar los vectores velocidad y aceleración y la ecuación de las rectas tangentes a las siguientes curvas en  $t_0$

- (a)  $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3), t_0 = 0$
- (b)  $\sigma(t) = (\cos^2(t), 3t - t^3, t), t_0 = 0$
- (c)  $\sigma(t) = (\sin(3t), \cos(3t), 2t), t_0 = 1$

14. Sean  $f(u, v, w) = u^2 + v^3 + wu$  y  $g(x, y) = x \sin y$ . Dadas

$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \sin t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \sin t, y(t) = t$$

calcule

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t), w(t)) \text{ y } \frac{d}{dt} g(x(t), y(t))$$

- (a) usando la regla de la cadena
- (b) sustituyendo

15. Sean  $f(u, v) = e^{uv} \sin(u^2 + v^2), g(u, v, w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$ . Dadas

$$u(x, y) = x + y, v(x, y) = xy, w(x, y) = x - y + 1$$

calcule las derivadas parciales de las funciones

$$f(u(x, y), v(x, y)) \text{ y } g(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

- (a) usando la regla de la cadena  
 (b) sustituyendo
16. a) ¿Para qué valores de  $p \in \mathbb{R}_{>0}$  es
- $$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^p \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$
- diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ ? ¿Para qué valores de  $p$  es  $f$  de clase  $C^1$ ?
- b) La función  $f$  se puede escribir como  $g(x^2 + y^2)$  con  $g(t) = t^p \sin \frac{1}{t}$  si  $t > 0$  y  $g(0) = 0$ . ¿Qué conclusiones se obtienen si se estudia la diferencibilidad de  $g$ ?
17. Sean  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivables y  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:
- (a)  $F(x, y) = G(f(x)g(y), f(x)h(y))$   
 (b)  $F(x, y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$   
 (c)  $F(x, y) = G(x, G(x, y))$   
 (d)  $F(x, y) = f(x)^{g(y)} \quad (\text{si } f(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R})$   
 (e)  $F(x, y) = G\left(\int_x^{f(y)} h(t) dt, g(y)\right)$
18. Calcule la derivada direccional de  $f$  en  $x_0$  en la dirección  $v$  siendo:
- (a)  $f(x, y) = \sin x \cos y \quad x_0 = (1, 1) \quad v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$   
 (b)  $f(x, y) = x^4 + \ln(xy) \quad x_0 = (e, 1) \quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$   
 (c)  $f(x, y, z) = e^z(xy + z^2) \quad x_0 = (0, 1, 0) \quad v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$   
 (d)  $f(x, y, z) = y + yz + zxy \quad x_0 = (1, 1, 1) \quad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$   
 (e)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad x_0 = (1, 1, 1) \quad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$   
 (f)  $f(x, y, z) = x^{yz} \quad x_0 = (e, e, 0) \quad v = \left(\frac{12}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13}\right)$   
 Si  $f$  es diferenciable en  $x_0$  verificar que la derivada calculada coincide con  $\nabla f(x_0) \cdot v$ .
19. Dada la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Muestre que el vector  $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  es normal a la superficie  $S$  en el punto  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  e interprete este hecho geoméricamente.
20. Sea  $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$

(a) Usando la definición de derivada direccional, muestre que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

y que  $\pm e_1, \pm e_2$  son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

(b) Muestre que  $f$  es continua en  $(0,0)$ .

(c) ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0,0)$ ?

21. Muestre que la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$  en la dirección  $-v$  (recordar que  $\|v\| = 1$ ) es igual a la derivada direccional de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  en la dirección de  $v$  pero con el signo opuesto, o sea

$$-\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial(-v)}(x_0)$$

22. (a) Pruebe que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y tal que para algún  $v, \|v\| = 1$  se cumple que  $Df(x) \cdot v = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces en cada recta que lleve la dirección de  $v$ ,  $f$  será constante.

(b) Construya ejemplos de lo demostrado anteriormente para  $n = 2$  y  $v = (1, 0), (0, 1)$  y  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

23. Calcule las derivadas direccionales de  $f$  en el origen en cualquier dirección  $v, \|v\| = 1$ , siendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

24. Calcule ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

(a)  $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \quad x_0 = (7, 0, 0)$

(b)  $xy - z \ln(y) + e^{xy} = 1 \quad x_0 = (0, 1, 1)$

(c)  $xy \sin(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \quad x_0 = (4, 0, 1)$

(d)  $\cos(x) \cos(y)e^z = 0 \quad x_0 = (\pi/2, 1, 0)$

25. Dada una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $(x_0, y_0)$  y  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x, y, z) = f(x, y) - z$ , vea qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  y el plano tangente a una superficie de nivel de  $h$  en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

26. Encuentre los planos tangentes a la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$$

que sean paralelos al plano  $\Pi : x + 4y + 6z = 8$ .

27. Encuentre la dirección en que la función  $z = x^2 + xy$  crece más rápidamente en el punto  $(1, 1)$ . ¿Cuál es la magnitud  $\|\nabla z\|$  en esta dirección? Interprete geoméricamente esta magnitud.
28. Si  $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$  denota la altura de una montaña en la posición  $(x, y)$ . ¿En qué dirección desde  $(1, 0)$  debería uno comenzar a caminar para escalar más rápido?
29. (a) Muestre que si  $\nabla f(x_0) \neq 0$  entonces  $-\nabla f(x_0)$  apunta en la dirección a lo largo de la cual  $f$  decrece más rápidamente.
- (b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función  $f(x, y) = 10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 4 \cos(3y)$ . En el punto  $(\pi/3, \pi/3)$  encuentre las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.
30. El capitán Ralph se encontró en el lado soleado de Mercurio y notó que su traje espacial se fundía. La temperatura en su sistema rectangular de coordenada en su vecindad viene dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-zy} + e^{-3z}$$

Si él está ubicado en  $(1, 1, 1)$ . ¿En qué dirección deberá comenzar a moverse con el fin de enfriarse lo más rápido posible?

31. Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ . Pruebe que  $|DF(x, y)| \neq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  pero que  $F$  no es inyectiva.
32. Determine si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase  $C^1$  en  $P$  y calcular el diferencial de  $F^{-1}$  en el punto  $F(P)$ ,
- (a)  $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  en  $P = (x, y) \neq (0, 0)$
- (b)  $F(x, y) = (\sin x, \cos(xy))$  en  $P = (\pi, \pi/2)$
33. Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y)$
- (a) Demostrar que existe un entorno  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que  $(1, 1) \in U$ , un entorno  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  tal que  $(-7, 2) \in V$  y una inversa para  $F$ ,  $F^{-1} : V \rightarrow U$ ,  $C^1$  tal que  $F^{-1}(-7, 2) = (1, 1)$ .
- (b) Sean  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  tal que  $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 5$  y  $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ . Calcular  $\frac{\partial(g \circ F^{-1})}{\partial v}(-7, 2)$ .
34. Sea  $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$ . Demuestre que  $f(x, y, z) = 0$  define una función implícita  $x = \varphi(y, z)$  en el punto  $(1, 1, 1)$ . Encuentre  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$ .
35. Encuentre la solución  $y = f(x, z)$  de  $x^2 + y^2 - z^3 = 0$  en un entorno de los siguientes puntos del plano  $xz$  y escribir explícitamente esos entornos

(a)  $(5, 10)$

(b)  $(0, 64)$

36. Determine las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

(a)  $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \quad P = (2, 0)$

(b)  $g(x, y) = x^5 + y^y + xy = 3 \quad P = (1, 1)$

(c)  $h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \quad P = (0, 0, 2)$

37. El paraboloido  $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1$  y la superficie esférica  $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$  se cortan en el punto  $(1, 1, 2)$ :

(a) Hallar el plano tangente en dicho punto, probar que ambos planos se cortan ortogonalmente y encontrar la recta de intersección de los dos planos tangentes.

(b) Usando el teorema de la función implícita, probar que en dicho punto, las dos superficies se cortan ortogonalmente y que la recta tangente a la curva de intersección de las dos superficies en dicho punto es la intersección de los dos planos tangentes.

38. Probar que existe una curva que es intersección de las superficies  $z = 4x^2 - 3y^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 24$  en el punto  $P = (2, -2, 4)$ . Hallar la recta tangente de dicha curva en el punto  $P$ .