Análisis I - Práctica 5

Verano 2007

Límites y Continuidad en $\mathbb{R}^n$

1. Si $x \in \mathbb{R}^n$, ponemos $\mathcal{N}x = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

   (a) Muestre que si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

   i. $|x_i| \leq \mathcal{N}x$, si $i = 1, \ldots, n$;

   ii. $\mathcal{N}x \leq \sqrt{n} \cdot \max\{|x_i| : i = 1, ..., n\}$;

   iii. $\max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \mathcal{N}x \leq \sqrt{n}\max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Describa geométricamente esta doble desiguadad.

   (b) Usando lo hecho, concluya que:

   $$\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n}\max|x_i| < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{N}x < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \max|x_i| < r\}.$$

   (c) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Muestre que equivalencia de los siguientes dos enunciados:

   i. A es abierto;

   ii. cualquiera sea $y \in A$, existe $r > 0$ tal que

   $$\{x \in \mathbb{R}^n : \max|x_i - y_i| < r\} \subseteq A.$$

2. (a) Muestre que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos

   i. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$;

   ii. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$;

   iii. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$.

   (b) Dé un ejemplo de un conjunto en $\mathbb{R}^3$ que no sea ni abierto ni cerrado.

3. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, calcule ∂A, $\bar{A}$, $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$:

   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

   (b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge z < 2\}$;

   (c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$;

   (d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 < 1/2\}$.

4. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son cerrados y acotados:

   (a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;

   (b) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

   (c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;

   (d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;

(e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

5. En cada uno de los siguientes casos, encuentre una sucesión de puntos de A que no posee ninguna subsucesión convergente a un punto de A:

   (a) $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$;

   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$.

6. Dé el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y grafiquelo:

   (a) $f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$;

   (b) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{y - x^2}$;

   (c) $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$;

   (d) $f(x, y) = \dfrac{1}{x}$;

   (e) $f(x, y) = x^y$;

   (f) $f(x, y) = \dfrac{\ln(1 - y + x^2)}{\sin x}$

   (g) $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \frac{1}{1 + t^2}\, \mathrm{d}t$;

   (h) $f(x, y) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$;

   (i) $f(x, y) = \dfrac{\sin x^2 y}{\ln(1 - x^2)}$.

7. Encuentre las curvas de nivel de las siguientes funciones:

   (a) $f(x, y) = x + y$;

   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$;

   (c) $f(x, y) = \sqrt{xy}$;

   (d) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2}$;

   (e) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

8. Estudie las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones y diga cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

   (a) $z = 2x^2 + y^2$;

   (b) $z^2 = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{2}$;

   (c) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

   (d) $3x + 2y - z = 0$;

   (e) $z = x^2 y^2 + 1$;

   (f) $z^2 = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3} - 2$;

   (g) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$;

   (h) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$, con $x > 0$.

9. Encuentre las superficies de nivel de las siguientes funciones:

   (a) $u = x + y + z$;

   (b) $u = x^2 + y^2 - z^2$;

   (c) $u = x^2 + y^2 + z^2$;

   (d) $u = x^2 + 2y^2$.

10. (a) Usando sólo la definición de límite demuestre que:
    i. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1$;
    ii. $\lim_{(x,y)\to(-1,8)} xy = -8$.

    (b) Si $\epsilon = 1$, $\epsilon = 1/100$ ó $\epsilon = \alpha^2$, encuentre $\delta > 0$ tal que

$$\mathcal{N}(x, y) - (-1, 8) < \delta \Longrightarrow |xy + 8| < \epsilon.$$

11. Pruebe que:

    (a) $\lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39$;
    (b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy} = 0$;
    (c) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} ye^{x} = 1$;
    (d) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \sin(x \cos y) = 0$;
    (e) $\lim_{(x,y)\to(c,0)} \dfrac{\sin x^2 y}{x^2 - y^2} = 0$ si $c \neq 0$;
    (f) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \dfrac{8}{3}$.

12. (a) Sea $f : B_r(a, b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = 0$. Pruebe que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\sin f(x, y)}{f(x, y)} = 1.$$

    (b) Sea $f : B_r(a, b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = +\infty$. Pruebe que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\ln f(x, y)}{f(x, y)} = 0.$$

    (c) Calcule:
    i. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$;
    ii. $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$;
    iii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$.

13. Analice la existencia de los límites restringido a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

    (a) $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$;
    (b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;
    (c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;
    (d) $f(x, y) = \dfrac{\sin x}{y}$;
    (e) $f(x, y) = |x|^y$;
    (f) $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{xy + y - x}$;

(g) $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$;

(h) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

(i) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2 - x^2 + 1}{x^2 - y^2}$;

(j) $f(x,y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$;

(k) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$;

(l) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

(m) $f(x,y) = x\sin\dfrac{\pi}{y} + y\sin\dfrac{\pi}{x}$;

(n) $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{y}$;

(o) $f(x,y) = \dfrac{e^{x(y+1)} - x - 1}{|x-y|}$.

14. Demuestre que las siguientes funciones tienden a cero si (x,y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

15. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$
en $(1,0)$ y $(0,0)$;

(b) $f(x,y) = \begin{cases} |y|^x(1+x)^y, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ y } x > -1; \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$
en $(1,0)$ y $(0,2)$;

(c) $f(x,y) = \sin(x\cos y)$ en $(1,1)$ y $(0,2)$;

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0; \\ 1, & \text{en otro caso}; \end{cases}$
en $(0,0)$ y $(1,1)$;

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } xy \neq 0; \\ 0, & \text{si } xy = 0; \end{cases}$
en $(1,0)$ y $(-1,2)$.

16. Consideremos la función $f(x,y) = x \cdot y \cdot \sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$.

(a) Calcular su dominio natural.

(b) Determinar si es posible extenderla a $\mathbb{R}^2$ de modo que resulte continua.

17. Encuentre los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{1-x^2-y^2}$

(c) $f(x,y) = |y|$

(d) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{x-y}$

(e) $f(x,y) = \dfrac{xy+1}{x^2-y}$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

18. Demuestre que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

19. Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = (x^2, e^x)$;

(b) $f(x,y) = \left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right)$.

20. Sea $f : \{(x,y) : x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin xe^y}{2x}.$$

Si $b \in \mathbb{R}$, calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y)$.

21. (a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{1}{1-\mathcal{N}(x,y)}$. Muestre que f es continua y no es acotada.

(b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = \mathcal{N}(x,y)$. Pruebe que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

22. Sea $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2y)}{\ln(1-x^2)}$

(a) Encuentre el dominio D de f y grafíquelo.

(b) Dado $q = (q_1, q_2) \in Fr(D)$. ¿Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(q_1,q_2)} f(x,y)$?

23. Definimos $F : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}$ como

$$F(x_1, x_2, ..., x_9) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}.$$

(a) Sea $a \in \mathbb{R}^9$. Muestre que si $F(a) \neq 0$, entonces hay un entorno U de a tal que si $x \in U$ entonces $F(x) \neq 0$.

(b) Concluya que si $a \in \mathbb{R}^9$ es tal que la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ es inversible, entonces existe un entorno U de a tal que si $x \in U$, la matriz $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ también lo es.