Análisis I - Práctica 4

Verano 2007

Series de Potencias

1. Hallar los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales convergen las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{x}{3^n}$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

2. Escribir los primeros cuatro términos del desarrollo en serie de potencias de x de las siguientes funciones:

   (a) $\tan x$

   (b) $e^{\cos x}$

   (c) $\ln(1+e^x)$

   (d) $(1+x)^x$

3. Calcular la serie de Maclaurin de las siguientes funciones: e^x, e^{x^2}, e^{-x^2}, a^x y $\sin x$.

4. Aprovechando las fórmulas del desarrollo en serie de potencias de las funciones e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ y $(1+x)^\alpha$, desarrollar en series de potencias las siguientes funciones y determinar los radios de convergencia de esos desarrollos:

   (a) $\frac{1}{1-x}$;

   (b) $\sqrt{1+x}$;

   (c) $\frac{1}{10+x}$;

   (d) $\frac{1}{1+x^2}$;

   (e) $\cos^2 x$;

   (f) $(1+x)e^{-x}$;

   (g) $\frac{1}{4-x^4}$;

   (h) $\frac{e^x-1}{x}$;

   (i) $\frac{1}{(1+x)^2}$;

   (j) $\arctan x$;

   (k) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$.

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ si $|x| < 1$.

6. (a) Calcular el desarrollo en serie de $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$, indicando el radio de convergencia.

   (b) Comprobar que, usando el desarrollo obtenido, se puede escribir al $\ln a$ como una serie convergente de números racionales, siempre que sea $a \in \mathbb{N}$. Escriba una fórmula $\ln 5$.

7. Calcular:

   (a) $\cos 10^\circ$ con error menor que 10^{-4};
   (b) $\sin 18^\circ$ con error menor que 10^{-3};
   (c) $\arctan 1/5$ con error menor que 10^{-4};
   (d) $\ln 5$ con error menor que 10^{-3};
   (e) $\sqrt{e}$ con error menor que 10^{-4}.

8. En cada caso, desarollar en serie (indicando el radio de convergencia) las funciones f y $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ y aproximar,

   (a) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ con error menor que 10^{-4}, para $f(x) = e^{-x^2}$;
   (b) $\int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x$ con error menor que 10^{-3}, para $f(x) = \frac{x}{x}$;
   (c) $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ con error menor que 10^{-4}, para $f(x) = \cos\sqrt{x}$.

9. Proponiendo una solución dada por una serie de potencias, integrar las siguientes ecuaciones diferenciales y determinar el dominio de validez de las soluciones obtenidas.

   (a) $y' + xy = 0$, $y(0) = 0$;
   (b) $y'' + xy' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
   (c) $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. ¿Cuál es la función obtenida en este caso?

10. Encuentre los primeros cuatro términos no nulos del desarrollo en serie de potencias de las soluciones de las siguientes ecuaciones

    (a) $y'' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
    (b) $y' = x^2 y + y^3$, $y(0) = 1$;
    (c) $y'' = xy^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.