Análisis I - Práctica 3

Verano 2007

Derivadas y Diferenciabilidad

1. (a) Si $f(x) = 2 - 2x + x^3$, hallar $f'(0)$ y $f'(2)$ usando directamente la definición.

   (b) Si $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, hallar $f'(0)$ y $f'(1)$ usando la definición.

2. Mostrar que $g(x) = x|x|$ es derivable para todo $x \in \mathbb{R}$, y calcular su derivada.

3. Hallar las derivadas de las funciones:

   (a) $f_1(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0; \\ \ln(1+x), & \text{si } x \geq 0; \end{cases}$

   (b) $f_2(x) = \begin{cases} \sin(x^2 - 1) & \text{si } x < -1; \\ \sqrt{x+1}, & \text{si } x \geq -1. \end{cases}$

4. (a) Si $f(x) = |x|^3$, calcular f', f'' y mostrar que $f'''(0)$ no existe.

   (b) Definir una función que sea tres veces derivable pero que no sea derivable cuatro veces en 0.

5. Determinar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada uno de las siguientes funciones en los puntos indicados:

   (a) $f(x) = x^3$ en $x_0 = 1$ y en $x_1 = -1$.

   (b) $f(x) = 1/x$ en $x_0 = 1/2$ y en $x_1 = 1$.

   En cada caso, esbozar el gráfico de la función considerada.

6. (a) Hallar las coordenadas de los puntos de la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en los que la recta tangente tiene pendiente 9.

   (b) Hallar las coordenadas de los puntos de esa misma curva en los que la recta tangente tiene la propiedad de pasar por el origen.

   (c) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes que puedan trazarse desde el origen a la curva de ecuación $y = -4x^2 + 3x - 1$.

   (d) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la normal a la curva $y = 2 + x - x^3$ en el punto $(2, -4)$.

7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0; \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

   (a) ¿Es f continua en todo $\mathbb{R}$?

   (b) Calcular $f'(x)$ para $x \neq 0$.

(c) Analizar la existencia de las derivadas laterales y de la derivada en $x = 0$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par y derivable. Mostrar que

   (a) $f'(0) = 0$.

   (b) f' es impar.

   ¿Qué sucede si f es impar?

9. Si f está definida y es derivable en un entorno de un punto x_0, existen funciones l y r definidas en ese entorno tales que l es lineal, se tiene que $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$ y, finalmente, $f = l + r$.
   Hallar esta descomposición para cada una de las siguientes f en el punto indicado:

   (a) $f(x) = x^3 - 2x - 1$ en $x_0 = 2$;

   (b) $f(x) = -2$ en $x_0 = 10$;

   (c) $f(x) = 1/x$ en $x_0 = 1$;

   (d) $f(x) = ax + b$ en $x_0 \in \mathbb{R}$.

10. Calcular los incrementos y diferenciales de las funciones:

    (a) $f(x) = 2x^2 - x$ cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0,01$;

    (b) $f(x) = \sin x$ cuando $x = \pi/3$ y $\Delta x = \pi/18$.

11. (a) Sabiendo que $\sin 60° = \sqrt{3/2} \simeq 0,866025$ y $\cos 60° = 1/2$, hallar los valores aproximados de $\sin 60°3'$ y $\sin 60°18'$ sin usar una calculadora.

    (b) Hallar un valor aproximado de $\tan 45°4'30''$.

    (c) Sabiendo que $\log_{10} 200 \simeq 2,30103$, hallar un valor aproximado de $\log_{10} 200,2$.

    (d) Usando la aproximación diferencial, encontrar un valor aproximado de $\sqrt[3]{65}$.

    (e) Usando aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{1-x}$, estimar los números $\sqrt{0,9}$ y $\sqrt{0,99}$.

    (f) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Encontrar la aproximación lineal de $(1+x)^\alpha$, y usar este resultado para estimar $1,0002^{50}$, $\sqrt[3]{1,009}$ y $1,0003^{-15}$.

12. Empleando el concepto de diferencial, interpretar el origen de las siguientes fórmulas aproximadas, válidas para $|b| \ll |a|$:

    (a) $\sqrt{a^2 + b} \simeq |a| + \dfrac{b}{2|a|}$;

    (b) $\sqrt[3]{a^3 + b} \simeq a + \dfrac{b}{3a^2}$.

13. Verificar que se cumple el teorema de Rolle para las siguientes funciones en los intervalos indicados:

    (a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[1, 2]$.

(b) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ en el intervalo $[1, 3]$.

(c) $f(x) = \sin^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

14. Comprobar que entre los ceros de la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ se encuentra un cero de su derivada.

15. La función $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del segmento $[-1, 1]$. Mostrar que su derivada no se anula en ningún punto de este segmento. Explicar por qué esto no contradice el teorema de Rolle.

16. (a) Sea $f(x) = x(x-1)(x-2)(x+5)$. Probar que f' tiene exactamente tres raíces reales.

    (b) Probar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real.

    (c) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{a^2 x} + x^3 + x$ si $x \in \mathbb{R}$. Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-1, 0]$.

17. Comprobar que el teorema de Lagrange es válido para la función $y = 2x - x^2$ en el segmento $[0, 1]$.

18. Encontrar explícitamente el punto intermedio cuya existencia está garantizada por el teorema de Cauchy en el caso de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el segmento $[1, 2]$.

19. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Demostrar las siguientes afirmaciones:

    (a) Si $f' = 0$ en (a, b), entonces f es constante.

    (b) Si $f' = g'$ en (a, b), entonces $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

    (c) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente.

    (d) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente.

20. Probar las siguientes desigualdades:

    (a) $e^x \geq 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

    (b) $\sin x \leq x$, $\forall x \geq 0$;

    (c) $\sqrt{x} \geq \ln x$, $\forall x > 0$;

    (d) $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

    (e) $\frac{x}{1+x} < \ln(1 + x) \leq x$, $\forall x > 0$;

    (f) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

21. Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) \geq x^2 - \ln x$ cualquiera sea $x \in (0, +\infty)$. Mostrar que f es creciente.

22. Desarrollar:

    (a) la función $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ en potencias de $x - 2$;

    (b) la función $g(x) = \sqrt{x}$ en potencias de $x - 1$ hasta orden 3.

23. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para las funciones:

        i. $f(x) = \ln(x + 1)^2$;

        ii. $g(x) = e^{x+2}$.

    (b) Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x) = \tan x$ en $a = \pi/4$.

24. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 2 y la expresión del resto para la función $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

    (b) Evaluar el error de la igualdad aproximada $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ cuando $x = 0,2$.

25. (a) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Hallar el polinomio de Maclaurin de grado n de la función $y = (1 + x)^\alpha$.

    (b) Calcular el valor de $(1,3)^{2/3}$ con error menor que $1/100$.

26. Calcular:

    (a) el número e con error menor que 10^{-4};

    (b) $\cos 3^\circ$ con error menor que 10^{-2};

    (c) $\ln \frac{2}{3}$ con error menor que 10^{-3}.

27. Aplicando la fórmula de Taylor, calcular:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$;

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1 + x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$.

28. Sea $f(x) = 2x^2 - x \sin x - \cos^2 x$.

    (a) Comprobar que f tiene por lo menos 2 ceros.

    (b) Encontrar un mínimo local.

29. *Regla de L'Hopital.* Calcular los siguientes límites:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x^n - 1}$;

    (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$;

    (c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^n e^{-x}$;

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\ln x}$;

    (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n}$;

    (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

    (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{\sin x}}$;

    (h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}$;