

Análisis I - Práctica 1

Verano 2007

Límites y Series

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

(a) $|x + 3| < 1$;

(d) $|3x - 1| < |x - 1|$;

(b) $|x - 3| \geq 10$;

(e) $\left| \frac{x - 2}{3x + 1} \right| \leq 1$.

(c) $|x| > |x + 3|$;

2. Representar los siguientes conjuntos en \mathbb{R} :

(a) $\{x : |x - 1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$;

(c) $\{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$.

(b) $\{x : |x - 3| < |2 - x|\}$;

3. (a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:

i. $\mathbb{R}_{>0}$;

ii. $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.

(b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente

i. \mathbb{Z} ;

ii. $\{x^{-1} : x < 0\}$;

iii. $\text{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

4. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo, y, en caso de poseerlos, calcularlos:

(a) $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$;

(c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(b) $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;

(d) $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$.

5. Estudiar los extremos de los siguientes conjuntos y representarlos en la recta real:

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\}$;

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\}$;

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}$.

6. (a) Probar que el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ no tiene máximo ni supremo en \mathbb{Q} .

(b) Probar que el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$ no tiene mínimo ni ínfimo en \mathbb{Q} .

Sugerencia: en (a) mostrar explícitamente que, dado $a \in A$, existe un elemento mayor que a en A y en (b) proceder análogamente.

7. Calcular

- (a) $\sup \left\{ \frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\};$ (c) $\inf \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\};$
 (b) $\sup \left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N} \right\};$ (d) $\inf \{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}.$

8. Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

- (a) $|a + b| = |a| + |b|;$ (d) $|a - b| < |a| + |b|;$
 (b) $|a + b| < |a| + |b|;$ (e) $||a| - |b|| = |a - b|;$
 (c) $|a - b| = |a| + |b|;$ (f) $||a| - |b|| < |a - b|.$

9. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

10. Mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ y determinar para cada $\epsilon > 0$ un valor $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \epsilon$ si $n > n_0$. Completar la siguiente tabla:

ϵ	0,1	0,001	0,00001	10^{-6}
n_0				

11. Mostrar usando la directamente la definición que:

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n^2 + 3n - 2) - 3}{n} = 0;$
 (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - n + 4} = 1;$
 (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{2n + 5} = \frac{3}{2};$
 (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - \sin n}{n^2 + \cos n} = 1.$

12. Sean $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ polinomios de grado n y m respectivamente. Suponiendo que $a_n, b_m > 0$, investigar el límite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(k)}{g(k)}$$

cuando $n > m$, $n = m$ ó $n < m$.

13. Calcular:

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k \sin n!}{n + 1}$, si $0 \leq k < 1;$
 (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$
 (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right).$

Sugerencia: Usar que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14. Estudiar la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cuando $n \rightarrow +\infty$ si:

(a) $x_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{2^n})$;

(b) $x_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{n+1}{2n-1}$.

15. La sucesión de *Fibonacci* es la sucesión $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unívocamente determinada por las condiciones

$$F_1 = F_2 = 1;$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \text{si } n \geq 0.$$

Mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$.

16. Definamos una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ poniendo $a_1 = \alpha \neq 0$, y

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n}$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué valores de α es a_n convergente?

17. Mostrar que si la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, también lo hace $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. ¿Qué relación hay entre los límites de ambas sucesiones? ¿Vale la implicación recíproca?

18. Sin usar ningún criterio de convergencia, calcule, cuando $r \in \mathbb{R}^+$,

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r}$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$.

19. (a) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $a_n \in \mathbb{R}^+$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Probar que:

i. si $l < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

ii. si $l > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;

iii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

(b) Calcular, usando la parte anterior, el límite de las sucesiones con términos dados por:

i. $a_n = \sqrt[n]{n}$;

ii. $a_n = \sqrt[n]{n!}$;

iii. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$.

(c) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $a_n \in \mathbb{R}^+$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar mediante un ejemplo que puede existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ y no existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Sugerencia: considerar $a_n = 2 + (-1)^n$.

20. Probar que, si $|x| < 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con término general dado por

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$$

tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

21. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

(a) $\frac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$;	(f) $\frac{\cos(n\pi/2)}{n^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}$;
(b) $\frac{n^4 - n + 2^n n}{(n^3 - 1)2^n}$;	(g) $\frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n}$;
(c) $\frac{8^n - 4^n}{3^n}$;	(h) $\frac{n}{e^n}$;
(d) $\frac{\sqrt[n]{1 + 2^n + \cdots + n^n}}{n}$;	(i) $\frac{\ln(n)}{n}$;
(e) $\sqrt[n]{n^2 + n}$;	(j) $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n$.

22. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

(a) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$;	(d) $\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+4}{n+1}}$;
(b) $n^{\frac{\sin(n)}{n}}$;	(e) $\left(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}-5}\right)^{\sin(n)}$.
(c) $(n^4 + n)^{1/n^5}$;	

23. Escribir los primeros tres términos de las series dadas por los siguientes términos generales:

(a) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$;	(c) $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;
(b) $u_n = \frac{n^3}{n+1}$;	(d) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

24. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 3}$;	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$;
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$;	(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$;

$$\begin{array}{ll}
\text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 3}; \\
\text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}; & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right). \\
\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}; &
\end{array}$$

25. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, es

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$

26. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n),$$

mostrar que la sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

27. Hallar la suma de las siguientes series:

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}; & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}; \\
\text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n-2}}. \\
\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; &
\end{array}$$

28. Se deja caer una pelota desde una altura de 5 metros. Cada vez que rebota en el piso, alcanza una altura de $3/4$ partes de la distancia desde la que cayó. Calcule la distancia total que habrá recorrido cuando quede en reposo.

29. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{n!}.$$

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}.$$

30. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n};$$

31. (a) ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$ es divergente?

(b) Si $a_n > 0$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, entonces:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ no converge.

32. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}.$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n};$$

33. (a) Probar que la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge condicionalmente.

(b) Sea $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Reordenemos los términos de la serie de modo que después de un término positivo vayan dos términos negativos:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

Determinar la expresión del término general de esta serie y demostrar que la serie obtenida converge a $s' = \frac{1}{2}s$.