Práctica 5

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$.
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$.
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nln(n)}$.
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$.
   (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$.
   (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$.
   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$
   (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nln^2(n)}$.

2. Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

3. Si $r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, demostrar que r_n converge.

4. Hallar la suma de las siguientes series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$.
   Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2-4n+2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

6. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

7. ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$ es divergente?

8. Probar el siguiente teorema de Abel: Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números positivos, y si $\sum a_n$ converge, entonces $na_n \to 0$ si $n \to \infty$. *Sugerencia.* $na_{2n} \leq a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \to 0$ si $n \to \infty$, y similarmente para na_{2n+1}.

9. Probar el siguiente criterio de convergencia (condensación de Cauchy): Sea b_n una sucesión decreciente de números no negativos. Entonces la serie $\sum b_n$ converge si y sólo si la serie $\sum 2^n b_{2^n}$ converge.

10. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$.

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}$

11. (a) Mostrar que si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum a_n^2$ converge. ¿Vale este resultado si $\sum a_n$ converge sólo condicionalmente?

    (b) ¿Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq 0$, se puede concluir algo de $\sum \sqrt{a_n}$?

12. Probar el siguiente criterio de Dirichlet: Sea $\{b_n\}$ una sucesión monótona decreciente de números positivos, con $\lim b_n = 0$. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tales que existe $K > 0$ y las sumas parciales $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ satisfacen $S_n \leq K$. Entonces la serie $\sum a_m b_m$ es convergente.

    Sugerencia. $\sum_{m=1}^{n} a_m b_m = S_1(b_1 - b_2) + S_2(b_2 - b_3) + \cdots + S_{n-1}(b_n - b_{n-1}) + S_n b_n$.

13. Verificar que si θ no es múltiplo de 2π valen las fórmulas :

$$\begin{aligned} \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta &= \frac{\sin(n\theta/2)\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \\ \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta &= \frac{\sin(n\theta/2)\cos((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \end{aligned}$$

14. Sea $\{b_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos, con $\lim b_n = 0$. Usando los dos ejercicios anteriores, mostrar que si θ no es múltiplo de 2π, las series

$$\sum b_n \cos n\theta, \qquad \sum b_n \sin n\theta$$

son convergentes. Así, por ejemplo, las series $\sum (\cos n\theta)/n^\alpha$ y $\sum (\sin n\theta)/n^\alpha$ son convergentes para todo $\alpha > 0$.

15. Sea $|\alpha| < 1$. Mostrar que

$$1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \cdots + n\alpha^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-\alpha)^2}.$$

16. Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series convergentes (no necesariamente absolutamente), ¿es la serie producto (de Cauchy) convergente?

    Sugerencia. Considerar $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, n \geq 1$.

17. Hallar los valores de x para los cuales convergen las series:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{x}{3^n})$

    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

    (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

    (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{n^n}$