

Práctica 3

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y $X, Y \subseteq \mathbb{R}$. Decidir en cada caso si corresponde \subseteq , \supseteq ó $=$, y probarlo.

$$\begin{array}{llll}
 (i) & f(A \cup B) & \dots\dots & f(A) \cup f(B) \\
 (ii) & f^{-1}(X \cup Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y) \\
 (iii) & f(A \cap B) & \dots\dots & f(A) \cap f(B) \\
 (iv) & f^{-1}(X \cap Y) & \dots\dots & f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y) \\
 (v) & f(\mathbf{C}A) & \dots\dots & \mathbf{C}(f(A)) \\
 (vi) & f^{-1}(\mathbf{C}X) & \dots\dots & \mathbf{C}(f^{-1}(X))
 \end{array}$$

2. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ si y solo si para toda sucesión estrictamente decreciente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, vale $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

3. Sean $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monótona y $x \in (a, b]$. Demostrar que si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (a, b]$ tal que

- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$,
- $x_n < x$ para todo n , y
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$,

entonces $f(x^-) = l$.

Enunciar el resultado correspondiente para $f(x^+)$.

4. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(A) \subseteq B$. Si f es continua en $a \in A$ y g es continua en $f(a)$, probar que $g \circ f$ es continua en a .

5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Demostrar que f es una función constante. Deducir que dos funciones continuas que coinciden sobre \mathbb{Q} son la misma función.

6. Hallar todos los puntos donde la función f es continua, siendo

- (a) $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & \text{si } x = \frac{a}{b} \text{ con } a, b \in \mathbb{Z} \text{ coprimos y } b > 0 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

7. Sea $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continua. Demostrar que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.
Sugerencia. Considerar la función $x - f(x)$.
8. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que son equivalentes:
- f es continua (en todo \mathbb{R}).
 - $f^{-1}(G)$ es abierto para todo $G \subseteq \mathbb{R}$ abierto.
 - $f^{-1}(F)$ es cerrado para todo $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado.
9. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in K$. Probar que existe $\alpha > 0$ tal que $f(x) > \alpha$ para todo $x \in K$.
10. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Probar que f alcanza su mínimo valor.
11. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Probar :
- $\{|x| : x \in K\}$ es compacto.
 - Dado $c \in f(K)$ existe entre las raíces x de la ecuación $f(x) = c$, una de módulo mínimo.
12. Estudiar la continuidad uniforme de las funciones siguientes:
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = |x|$.
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = x^2$.
 - $f : (r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sqrt{x}$, con $r = 0$ y con $r > 0$.
 - $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siendo $f(x) = d(x, S)$, donde $S \subseteq \mathbb{R}$.
13. Sea $f : S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Demostrar que f es uniformemente continua en S si y solo si para todo par de sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ de puntos de S tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$, se verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$.
14. Mostrar que $f(x) = \sin(x^2)$ no es uniformemente continua sobre \mathbb{R} .
15. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ y sean $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas.
- Probar que $f + g$ es uniformemente continua.
 - Mostrar con un ejemplo que $f \cdot g$ no necesariamente es uniformemente continua, aún si alguna de las funciones f ó g es acotada.
 - Probar que si $h : f(S) \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función uniformemente continua entonces $h \circ f : S \rightarrow \mathbb{R}$ también lo es.
16. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en los intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$. Probar que f es uniformemente continua en $[a, c]$.
- ¿Es cierto que si f es una función uniformemente continua sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ y también sobre un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$, entonces lo es en $A \cup B$?

17. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 y α números reales. Se dice que f es *localmente Lipschitz de orden α en el punto x_0* si existen $\varepsilon, M \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$|f(x) - f(x_0)| < M|x - x_0|^\alpha \text{ para todo } x \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

M se llama la *constante de Lipschitz* de f . Cuando el orden $\alpha = 1$ decimos simplemente que f es *Lipschitz* en x_0 .

- (a) Demostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 0$ en x_0 entonces f es continua en x_0 .
- (b) Mostrar que si f es localmente Lipschitz de orden $\alpha > 1$ en x_0 , entonces es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$.
18. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es Lipschitz si existe una constante $M > 0$, llamada la *constante de Lipschitz* de f , tal que

$$|f(x) - f(y)| < M|x - y| \text{ para todo } x, y \in A.$$

Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Demostrar que f no es Lipschitz pero sin embargo f es uniformemente continua (en particular “*unif. cont. $\not\Rightarrow$ Lipschitz*”).

19. Sea $S \subset \mathbb{R}$ y sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz con constante igual a $M < 1$. Demostrar que si S es cerrado, y $f(S) \subseteq S$, entonces existe $y \in S$ tal que $f(y) = y$, en otras palabras, f tiene un punto fijo.

Sugerencia. Considerar la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S construída recursivamente así: $x_1 \in S$ cualquiera, si x_n está definido se toma $x_{n+1} := f(x_n)$, en otras palabras, $x_{n+1} := f^{(n)}(x_1)$. Demostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy; tomar $y = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Mostrar con un ejemplo que el resultado es falso si no se supone S cerrado.

20. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$. Demostrar que f es Lipschitz con $M = 1$ pero que f no tiene puntos fijos.

Sugerencia. Considerar la función $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = |x - f(x)|$.

21. Considérese el conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Dado que este conjunto es numerable e infinito se puede escribir: $\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Se define $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$f(x) = \sum_{n \in \Omega_x} \frac{1}{2^n}$$

donde $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N} : x_n < x\}$.

Demostrar que:

- (a) f está bien definida.
- (b) f es una función monótona creciente.
- (c) f es discontinua en todo punto del conjunto $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$; más aún: para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $f(x_n+) - f(x_n-) = \frac{1}{2^n} > 0$.

- (d) f es continua a izquierda en todo $x \in (0, 1)$; es decir, para todo $x \in (0, 1)$ vale que $f(x-) = f(x)$.
- (e) f es continua en todo punto del conjunto $(0, 1) - \mathbb{Q}$.
22. Estudiar si las funciones que siguen son de variación acotada en el intervalo $[a, b]$ correspondiente y en el caso afirmativo dar una mayoración para $V_f(a, b)$.

$$(a) f(x) = \cos(x) \text{ en } [0, 3\pi] \quad (b) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = 2x^3 - 3x^2 \text{ en } [-1, 2] \quad (d) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)^2 & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En el caso (d) estudiar también la derivabilidad de f .

23. Demostrar que si f y g son funciones de variación acotada en $[a, b]$ entonces $f+g$, $f-g$ y fg también lo son.
24. Para las funciones de variación acotada que siguen, hallar la función V_f (recordamos que $V_f(a) = 0$ y $V_f(x) = V_f(a, x)$ si $a < x \leq b$):

$$(a) f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (b) f(x) = \sin x \text{ en } [0, 2\pi]$$

Para cada función encontrar explícitamente funciones monótonas crecientes g_1 y g_2 tales que $f = g_1 - g_2$.