Taller de Cálculo Avanzado - Ejercicios para entregar

Turno tarde

Ejercicio 1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos. Consideremos la sucesión $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Probar que si $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, entonces $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejercicio 2. Sea $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ existe un intervalo centrado en x que interseca sólo a un número finito de conjuntos F_m. Probar que $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} F_m$ es un conjunto cerrado.

Ejercicio 3. Sea $f : A \subseteq R \to \mathbb{R}$ uniformemente continua con A acotado. Probar que $f(A)$ es acotado.

Ejercicio 4. Sean $f, \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones tales que α es creciente y con la siguiente propiedad:

$\forall \varepsilon > 0$, existen funciones $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ (que dependen de ε) tales que:

i) $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ $\forall x \in [a, b]$

ii) $g_1, g_2 \in R(\alpha)$

iii) $\int_a^b g_2\, d\alpha - \int_a^b g_1\, d\alpha < \varepsilon$

Probar que $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$.

Ejercicio 5. Analizar la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(ln(n))^{2ln(n)}}$$