

# Taller de Cálculo Avanzado - Ejercicios para entregar

Turno mañana

**Ejercicio 1.** Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  una sucesión acotada. Sea  $A$  el conjunto de puntos límite de dicha sucesión. Probar que  $\limsup a_n = \max A$  y  $\liminf a_n = \min A$ .

**Ejercicio 2.** Sea  $S \subseteq \mathbb{R}$ . Probar que  $S$  es compacto y sin puntos de acumulación si y sólo si es finito.

**Ejercicio 3.** Analizar la continuidad uniforme de  $f(x) = x \ln x$  en  $(0, 1]$  y en  $[1, +\infty)$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  de variación acotada tal que  $f(0) = f(2\pi)$ .

(a) Probar que  $\forall n \in \mathbb{N}$ :  $\int_0^{2\pi} \cos(nx) df = n \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx$ .

(b) Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = 0$ .

**Ejercicio 5.** Analizar la convergencia de la siguiente serie para cada valor de  $p \in \mathbb{R}$ :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^p \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$