Parte A: estadísticos de orden

1. Tres integrantes de un equipo de salto juegan un campeonato. Se asigna al equipo la mejor de las tres distancias obtenidas.
El atleta A salta con distribución $\mathcal{U}[0,2]$.
El atleta B salta según una distribución cuya función de densidad es:
$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right) I_{[0,2]}(x).$$
El atleta C salta según una distribución cuya función de densidad es:
$$f(x) = \frac{x}{2} I_{[0,2]}(x).$$
   a) Hallar la distribución de la distancia asignada al equipo.
   b) Encontrar la probabilidad de que la distancia sea mayor que 1,2.

2. Un juego consiste en elegir un punto sobre una soga de 10 metros de longitud. Por jugar se pagan \$3 y se gana $\$|5 - X|$ donde X es el número elegido.
   a) Hallar la distribución de la ganancia.
   b) Supongamos que el juego se repite dos veces y se anota la mayor de las distancias al centro de la soga. Encontrar la distribución de la ganancia.

3. *a*) Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F. Se ordenan en orden creciente obteniéndose las variables aleatorias $X^{(1)} \leq \cdots \leq X^{(n)}$ que se denominan los estadísticos de orden de las variables aleatorias X_i. En particular:
$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \min_{1\leq i\leq n} X_i \\ X^{(n)} &= \max_{1\leq i\leq n} X_i \end{aligned}$$
Obtener la función de distribución de $X^{(k)}$, $(1 \leq k \leq n)$.
   b) Sea
$$f(x) = e^{-(x-\theta)} I_{(\theta,\infty)}(x), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$
Obtener la distribución de $X^{(1)}$.
   c) Sea
$$F(x) = \frac{x}{\theta} I_{(0,\theta)}(x) + I_{(\theta,\infty)}(x) \quad , \theta \in \mathbb{R}_{>0}.$$
Obtener la distribución de $X^{(n)}$.

4. Sean $X_1, \ldots, X_n$ v. a. independientes con distribuciones exponenciales de parámetros $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ respectivamente.
   a) Mostrar que la distribución de $Y = \min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ es exponencial.
   b) Probar que:
$$P\left(X_k = \min_{1\leq i\leq n} X_i\right) = \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}.$$
Sugerencia: Ver que X_k y $\min\limits_{i\neq k} X_i$ son independientes, y considerar el suceso $\left\{X_k \leq \min\limits_{i\neq k} X_i\right\}$.

5. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución $U(0,1)$. Probar que para $2 \leq k \leq n$,

$$P(X_{(k)} - X_{(k-1)} > t) = (1-t)^n.$$

Parte B: Distribución y Esperanza Condicional en el caso continuo

6. La llegada de un tren a la estación se produce con distribución uniforme entre las 10 y las 10 hs. 20 min. La partida se produce con distribución uniforme entre la llegada del tren y las 11 hs. Sean $X =$ hora de llegada, $Y =$ hora de partida.

   a) Hallar la función de densidad de X; la densidad de $Y|X = x$ y la densidad de Y.

   b) Calcular la probabilidad de que el tren haya llegado a la estación entre las 10:10 y 10:15 sabiendo que partió a las 10:25 horas.

   c) Calcular $cov(X, Y)$.

   d) Hallar $E(Y)$ de dos modos distintos.

7. Sean X e Y v. a. continuas tales que $Y \sim \Gamma(2, \lambda)$, $X|Y = y \sim \mathcal{U}(0, y)$.

   a) Hallar f_{XY}, f_X.

   b) Calcular $P(Y \geq 2|X \leq 1)$ si $\lambda = 1$.

8. Sea (X, Y) v. a. tal que $X \sim \varepsilon(\frac{1}{2})$ e $Y|X = x \sim \mathcal{U}(0, x^2)$.

   a) Hallar la distribución de $\frac{Y}{X^2}$.

   b) Calcular $E(X)$, $E(Y)$, $\text{cov}(X, Y)$.

9. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{y^2}{2x^3} \exp\left(-x - \frac{y}{x}\right) I_{[0,\infty)\times(0,\infty)}(x,y).$$

   a) Hallar la densidad de $Y|X = x$ y decir a qué familia pertenece.

   b) Hallar la densidad de $\frac{Y}{X}$.

   c) Calcular $P\left(1 < \frac{Y}{X} < 4|X = 3\right)$.

10. Las v.a. X e Y tienen distribución normal bivariada si su densidad conjunta es de la forma:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\,(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\right\}$$

   a) Mostrar que la densidad de $X|Y = y$ es normal con parámetros $\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - \mu_Y)$ y $\sigma_X^2(1-\rho^2)$.

   b) Las edades de los futuros padres que van a tener a sus hijos en un determinado hospital pueden ser aproximadas por una distribución normal bivariada con parámetros $\mu_X = 28{,}4$, $\sigma_X = 6{,}8$, $\mu_Y = 31{,}6$, $\sigma_Y = 7{,}4$ y $\rho = 0{,}82$ (los parámetros con el índice X se refieren a la edad de la mujer embarazada y los que tienen el índice Y a los de su esposo).

      1) Determinar la proporción de embarazadas de más de 30 años.

2) Sabiendo que el esposo tiene 35 años, hallar la probabilidad de que la mujer tenga más de 30 años. (Dicho de otro modo, hallar la proporción de hombres casados de 35 años cuyas mujeres tienen más de 30 años.)

11. Sea X una v.a. continua y g una función continua.

   a) Usando argumentos intuitivos, ver que

$$E\left(g(X)|X^2=t\right)=\frac{g\left(\sqrt{t}\right)f_X\left(\sqrt{t}\right)+g\left(-\sqrt{t}\right)f_X\left(-\sqrt{t}\right)}{f_X\left(\sqrt{t}\right)+f_X\left(-\sqrt{t}\right)}$$

   b) Usando la definición de esperanza condicional, probar que

$$E\left(g\left(X\right)|X^2\right)=\frac{g\left(\sqrt{X^2}\right)f_X\left(\sqrt{X^2}\right)+g\left(-\sqrt{X^2}\right)f_X\left(-\sqrt{X^2}\right)}{f_X\left(\sqrt{X^2}\right)+f_X\left(-\sqrt{X^2}\right)}$$

   c) Observar que $E\left(X^2|X\right)=X^2$ mientras que $E\left(X|X^2\right)\neq X$.

Parte C: Distribución y Esperanza Condicional con variables discretas y continuas

12. Sea (X,Y) un vector aleatorio tal que: $X|Y=y\sim\mathcal{P}(y)$, $Y\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$, $\alpha>0$, $\lambda>0$. Probar que $Y|X=n\sim\Gamma(\alpha+n,\lambda+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

13. Sea (X,Y) un vector aleatorio tal que: $X|Y=y\sim\mathcal{B}i(n,y)$, $Y\sim\beta(p,q)$. Probar que $Y|X=k\sim\beta(p+k,q+n-k)$, $0\leq k\leq n$.

14. Sean X e Y v. a. que satisfacen $X|Y=y\sim\varepsilon(y)$ e Y es tal que:

y	1	2
$p_Y(y)$	1/4	3/4

   a) Calcular $F_X(x)$ y $f_X(x)$.
   b) Calcular $P(Y=y,X\leq x)$ para $y=1{,}2$, $x>0$.
   c) Expresar $P(Y=y,X\leq x)$ en función de $P(Y=y|X=t)$.
   d) Deducir de 14*c* el valor de $P(Y=1|X=x)$ para $x>0$.