$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$$

1. Sea (X, Y) con densidad
$$f(x,y) = \frac{2}{x}e^{-2x}, \qquad \text{si } 0 < y < x.$$
Calcular $f_X, cov(X, Y)$.

2. Sean $X, Y \sim \mathcal{U}[1, 2]$ independientes. Se construyen un cuadrado de lado X y un círculo de radio Y. Calcular la probabilidad de que el área del cuadrado supere a la del círculo.

3. Sean $X, Y \sim \mathcal{E}(1)$ independientes. Sea $Z = Y/X$.
   a) Calcular la función de distribución de (X, Z) (Hacer sin utilizar cambio de variables).
   b) ¿Son X y Z independientes?

4. Un tirador arroja un dardo a un blanco circular de radio 3. En cada tiro tiene probabilidad $1/5$ de errar al blanco. Cuando acierta al blanco, el dardo se clava en un punto uniformemente distribuído en el círculo. Si acierta al blanco se le asigna un puntaje igual a la distancia entre el punto donde se clavó el dardo y el centro del blanco. Si le erra, el puntaje asignado es 4.
Hallar la función de distribución y la esperanza del puntaje asignado.

5. Ana y Juan combinan su primera cita en el botánico. La hora a la que Juan llega esta distribuída uniformemente entre las 12 : 15hs y las 12 : 45hs. Independientemente, el horario en que Ana llega está distribuído uniformemente entre las 12 y las 13hs.
Hallar las probabilidades de que:
   a) El primero en llegar no espere más de 5 minutos al segundo.
   b) Ana llegue primero.

6. Sean $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ independientes.
   a) ¿Cuál es la distribución de $X + Y$?.
   b) Pedro y Pablo juegan al Tetris. El puntaje de Pedro tiene distribución normal, con media 170 y varianza 20^2 mientras que el de Pablo también es normal, pero con media 160 y varianza 15^2. Asumiendo que los puntajes son independientes, calcular la probabilidad de que:
      1) Pablo obtenga más puntos.
      2) el puntaje total supere los 350 puntos.

7. Se define el soporte de la probabilidad P definida sobre el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}_k)$
$$\begin{aligned} sop(P) &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid P(B_\varepsilon(\mathbf{x})) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0\right\} \\ \text{donde } B_\varepsilon(\mathbf{x}) &= \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \varepsilon\right\} \end{aligned}$$
Probar que si $X = (X_1, X_2)$ es un vector aleatorio que induce la probabilidad $P_X = P$ en $\mathbb{R}^2$, es decir $P_X(B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$ $\forall B \in \mathcal{B}_2$, se cumple que: si $sop(P) \neq sop(P_1) \times sop(P_2)$, donde P_i son las marginales, entonces X e Y no son independientes.

8. $X, Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ independientes, calcular $f_{W,Z}$ donde

$$(W, Z) = (X + Y, X/Y),$$

¿Son independientes?

9.

$$f_{XY}(x, y) = (x + y)\mathbf{1}_{[0,1]x[0,1]}(x, y)$$
$$(W, Z) = \left(X, \frac{X + Y}{X}\right)$$

Hallar f_{WZ}, f_Z.

10. Sea (X, Y) uniforme en el círculo de radio 1 con centro en el origen. Hallar la densidad conjunta de:

$$(R, \Theta) = (\sqrt{X^2 + Y^2}, \tan^{-1}(Y/X)).$$

11. Sean X e Y v.a. independientes con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sea (ρ, θ) la expresión de (X, Y) en coordenadas polares, es decir $(X, Y) = (\rho \cos(\theta), \rho\ \mathrm{sen}(\theta))$, $\rho \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi$.

    a) Probar que ρ y θ son independientes.

    b) Hallar la probabilidad de que el par (X, Y) caiga en el círculo de centro en el origen y radio σ.

    c) Mostrar que θ tiene distribución uniforme.

    d) Notar que de esto se deduce que $P(X > 0, Y > 0) = P(X > 0, Y < 0) = \frac{1}{4}$. Probarlo.

12. $X, Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ independientes. Mostrar que

$$(W, Z) = ((X + Y)/\sqrt{2}, (X - Y)/\sqrt{2}),$$

son independientes.

13. $X \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$, $Y \sim \mathcal{E}(1)$ independientes. Probar que

$$W = \sqrt{2Y}\cos(X)$$
$$Z = \sqrt{2Y}\sin(X)$$

son independientes y tienen distribución $\mathcal{N}(0, 1)$.

14. Una fínca cuadrada cuyo lado mide 200 metros está dividida en dos partes iguales, una con frutales y otra con hortalizas. En la esquina 0 duerme el perro guardián. Cuando el perro se despierta, si detecta la presencia de un intruso sale en su persecución moviéndose sólo en las direcciones de los ejes. El ladrón, que queda inmóvil al despertarse el perro, se encontrará en un punto aleatorio de la fínca (X, Y). La primera coordenada X tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} x/2000 & \text{si } 0 \leq x \leq 200, \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

La segunda coordenada Y se distribuye uniformemente dentro de cada cultivo, pero la probabilidad de encontrarse en los frutales es doble que en las hortalizas. El perro corre a $10m/s$.

    a) Hallar la función de distribución de la coordenada Y.

    b) Hallar la función de densidad del tiempo que tarda en coger al intruso.

    c) Hallar la primera coordenada de la posición media en que se da caza, en menos de 15 segundos, a un ladrón que se encuentra en los frutales.