1. Sea X una v.a. Para cada uno de los siguientes casos calcular las probabilidades $P(X \in A)$, $P(X \in B)$, $P(X \in B \mid X \in A)$ y $P(X \in B \mid X \in A^c)$, donde la función de distribución de X es:

   a)
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < -3 \\ \frac{1}{4} & \text{si} & -3 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si} & 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si} & x \ge 2 \end{cases}$$
   En este caso sean $A = [-3, 1]$, $B = (-2, 2)$.

   b)
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x \le 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si} & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si} & 1 \le x \le 2 \\ \frac{x}{6} & \text{si} & 2 < x < 4 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{4} & \text{si} & 4 \le x \le 6 \\ 1 & \text{si} & x > 6 \end{cases}$$
   En este caso sean $A = [1, 5]$, $B = (1/2, 3)$.

   c)
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si} & x \ge 0 \end{cases}$$
   En este caso, sea A el conjunto de los números reales que difieren de algún natural en no más de $1/4$, $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2k}$ con $B_k = [k, k+1]$, $k \ge 0$.

2. La fracción de alcohol X en cierto compuesto puede considerarse una v.a., donde X tiene función de densidad
$$f_X(x) = c(1-x)\, I_{[0,1]}(x)\,.$$
   a) Determinar c.

   b) Supóngase que el precio de venta del compuesto depende del contenido de alcohol: si $x < \frac{1}{3}$, el precio es \$ 1, si $\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}$, el precio es \$ 2 y si $x > \frac{2}{3}$ entonces es de \$ 3. Calcular la esperanza.

3. El diámetro D (expresado en dm.) del tronco de cierta especie de árboles es una v.a. con función de densidad:
$$f_D(x) = k\, x\, I_{(0,10)}(x)$$
   a) Hallar el valor de la constante k.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?

   c) Ídem 3*b*) sabiendo que el diámetro mide más de 5 dm.

   d) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan diámetro entre 4 y 6 dm.

e) ¿Cuántos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm. sea $\geq 0{,}99$?

4. El tiempo de duración de los tubos fluorescentes que fabrica una determinada empresa tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0{,}7$ horas. Para hacer un control de calidad se eligen al azar de la producción semanal 30 lámparas. Calcular la probabilidad de que entre las 30 elegidas, 5 lámparas tengan duración entre 0 y 3 horas, 7 lámparas tengan duración entre 3 y 4.5 horas, 10 lámparas tengan duración entre 4.5 y 5.5 horas y las 8 lámparas restantes tengan duración mayor que 5.5 horas.

5. El colectivo que toma Felipe para ir al trabajo llega a la parada en algún momento entre las 10 y las 10:30 con distribución uniforme. Él llega a la parada a las 10 de la mañana,

   a) ¿cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 10 minutos?

   b) Si el colectivo no llegó a las 10:15, encontrar la probabilidad de que tenga que esperar por lo menos otros 10 minutos más.

6. Sea $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, sea $Y = [X] + 1$ (donde $[X]$ significa parte entera de X).

   a) Probar que $Y \sim \mathcal{G}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.

   b) Sean X, Y v.a. con densidad $\varepsilon(\frac{1}{3})$. Sea $Z = [X] + 1, W = [Y] + 1$.
   Hallar la distribución de $M = \min(Z, W)$.

7. Sea X una v.a. continua con función de distribución F. Sea $Y = F(X)$. Mostrar que $Y \sim \mathcal{U}[0, 1]$.

8. Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[0, 1]$. Hallar las funciones de distribución y de densidad de las siguientes variables aleatorias:

   a) $cX + d$

   b) $\dfrac{X}{X+1}$

   c) $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - X), \qquad \lambda > 0.$

9. Sea $C \sim \mathcal{U}[0, 5]$, calcular la probabilidad de que las raíces de la ecuación

$$4x^2 + 4xC + C + 2 = 0,$$

   sean ambas reales.

10. Sea U una variable con distribución $\mathcal{U}(0{,}1)$. Encontrar una función g tal que $g(U)$ tenga distribución

    a) $\mathcal{E}(1)$.

    b) Doble exponencial. Es decir con densidad

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

    c) $\mathrm{Bi}(5, 1/3)$.

    d) Una distribución discreta con rango numerable $R_X = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, y respectivas probabilidades $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11. Don Zoilo tiene dos vacas (Aurora y Belinda). La cantidad de leche (en litros) que da Aurora en un día es una variable aleatoria $X \sim \mathcal{E}\,(0{,}2)$. Es decir, su función de densidad es

$$f_X\,(x) = 0{,}2e^{-0{,}2x} I_{(0,+\infty)}\,(x)\,.$$

Belinda, en cambio, da 5 litros el 20 % de las veces y el resto no da nada. Don Zoilo ordeña a Belinda solamente los días en que Aurora da menos de 6 litros.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que Aurora dé más de 6 litros en exactamente dos días de la próxima semana? (los fines de semana no la ordeñan).
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que Don Zoilo obtenga más de 8 litros en un día?
   c) Con la leche que obtiene de Aurora, Don Zoilo fabrica manteca. La cantidad de manteca (en kilos) que obtiene con X litros de leche es $W = g\,(X)$ siendo

$$g\,(X) = \begin{cases} \sqrt[3]{X} & \text{si } X \leq 8 \\ \frac{1}{7}\,(X-1)^2 - 5 & \text{si } 8 < X \leq 15 \\ 2X - 7 & \text{si } 15 < X \end{cases}$$

   Hallar la función de densidad de la cantidad de manteca.

12. La proporción de azúcar artificialmente agregada a un jugo de frutas durante el proceso de producción en una cierta fábrica puede pensarse como una variable aleatoria X. La función de densidad de X es

$$f_X\,(x) = 12\,(1-x)\,x^2 I_{(0,1)}\,(x)$$

El precio de venta (en pesos) de dicho jugo de frutas, Y, depende de la fracción de azúcar agregada de la siguiente forma

$$Y = -27X^2 + 18X + 17.$$

   a) Hallar la función de distribución F_Y de la variable Y.
   b) Se elige al azar un jugo producido por dicha fábrica. ¿Cuál es la probabilidad de que valga más de $17?

13. Se dice que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de θ sii:

$$P(X \leq \theta - h) = P(X \geq \theta + h) \qquad \forall h > 0$$

   a) Dar dos ejemplos de v.a. con distribución simétrica, una discreta y otra continua.
   b) Sea X v.a. continua. Probar que son equivalentes:
      i. X tiene distribución simétrica respecto de θ.
      ii. $P(X \leq x) = P(X \geq 2\theta - x)$
      iii. $F_X(x) = 1 - F_X(2\theta - x)$
      iv. $f_X(x) = f_X(2\theta - x)$
      v. $f_X(\theta - x) = f_X(\theta + x)$

14. *a*) Sea X una v.a. con distribución $\mathcal{N}(0,1)$, es decir, normal estándar. Calcular usando la tabla:
      i. $P(X \leq 1{,}2)$
      ii. $P(-0{,}5 \leq X \leq 1{,}2)$
   b) Sea Y una v.a. con distribución $\mathcal{N}(2{,}5, 0{,}16)$. Calcular usando la tabla:
      i. $P(1{,}8 \leq Y \leq 3{,}5)$.

ii. $P(Y > 3{,}2)$.
iii. $P(Y^2 \leq 4)$.

15. En una cierta población humana, el índice cefálico I (anchura del cráneo expresada como porcentaje de la longitud) se distribuye normalmente entre los individuos. Hay un 58 % con $I \leq 75$, un 38 % con $75 \leq I \leq 80$ y un 4 % con $I > 80$. Hallar la función de densidad del índice y la $P(78 \leq I \leq 82)$.

16. Sea $Z \sim \Gamma(n, \lambda)$. Probar que:
$$F_Z(z) = P(X_z \geq n)$$
donde $X_z \sim \mathcal{P}(z\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$.

17. Sea Z una v.a. con distribución normal estándar. Probar que Z^2 tiene distribución $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2_1$.

18. Se dice que una v.a. X tiene distribución Weibull de parámetros α y β ($\mathrm{W}(\alpha,\beta)$) si su densidad es:
$$f(x) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right] I_{(0,+\infty)}(x) \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$
Ver que si X es una v.a. con esta densidad entonces $Y = (X/\alpha)^{\beta} \sim \varepsilon(1)$.

   a) Sea para $a > 0$ y $b > 0$, $G(a,b) = P(X > a + b \mid X \geq a)$. Mostrar entonces que si X es $\mathrm{W}(\alpha,\beta)$,
      1) con $\beta > 1$, entonces $G(a,b)$ es una función decreciente de a. ("Propiedad de desgaste").
      2) con $\beta < 1$, entonces $G(a,b)$ es una función creciente de a.

19. Hallar la esperanza y varianza de las siguientes variables aleatorias:

   a) $\Gamma(\alpha,\lambda)$. *Sugerencia*: recordar (y usar) que si $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$, cualquiera sean los valores de α y λ positivos.
   b) $\varepsilon(\lambda)$.
   c) $\chi^2(n)$.
   d) $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.
   e) $\mathcal{U}[a,b]$.
   f) $\beta(a,b)$. *Sugerencia*: recordar (y usar) que si $X \sim \beta(a,b)$, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$, cualquiera sean los valores de a y b positivos.