1. Se tira un dado equilibrado. Si el resultado es múltiplo de 2, se sacan con reposición 2 bolitas de una urna que contiene 2 bolitas blancas y 3 rojas. Si el resultado del dado no es múltiplo de 2, se sacan 3 bolitas sin reposición de la misma urna. Se define X como el número de bolitas rojas e Y = resultado del dado. Hallar p_X, p_Y, p_{XY}, $p_{X|Y}$, $p_{Y|X}$, $E(Y)$, $E(X|Y)$, $E(X)$.

2. *a*) Sean X e Y v. a. independientes. Probar que si:
   i. $X \sim \mathcal{B}i(n,p)$, $Y \sim \mathcal{B}i(m,p) \Rightarrow X|X+Y=k \sim \mathcal{H}(m+n,n,k)$.
   ii. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu) \Rightarrow X|X+Y=k \sim \mathcal{B}i\left(k, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

   b) Probar que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \mid X=k \sim \mathcal{B}i(k,p) \Rightarrow Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$

3. Un señor se va a pescar un fin de semana. La cantidad de peces que pican en el lapso de una hora sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Además cada pez tiene probabilidad q de zafarse y $1-q=p$ de ser atrapado. Sean X = cantidad de peces que pican, e Y = cantidad de peces atrapados.

   a) Mostrar que Y tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda p)$.
   b) Mostrar que la distribución de $(X-Y)|Y=y$ es $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$. ¿Son $X-Y$ e Y independientes?
   c) Encontrar el valor esperado del número de peces atrapados.

4. (Suma de un número aleatorio de variables aleatorias.) Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d) con esperanza y varianza finita, y N una variable aleatoria independiente de las X_i con $R_N \subset \mathbb{N}$.

   a) Probar que $E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E(N)E(X_1)$.
   b) Probar que
   $$Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E(N)Var(X_1) + E^2(X_1)Var(N).$$
   c) El número de reclamos recibido por una compañía de seguros en una semana es una variable aleatoria Poisson de parámetro λ. El monto pagado por cada uno de esos reclamos es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2. Hallar la esperanza y la varianza del total pagado por la compañía en concepto de reclamos en una semana. ¿Qué hipótesis se están haciendo? ¿son razonables?

5. *a*) Se arroja un dado repetidamente. X es el número de tiro en donde sale el primer as, Y es la cantidad de “dos” que salen antes del primer as. Calcular $E(Y)$ (sugerencia, condicionar a X).
   b) Se arroja 10 veces un dado equilibrado, sea X la cantidad de ases que salen. El dado se arroja X veces más. Sea Y la cantidad total de ases obtenida, halle su esperanza.

6. (Forma alternativa para calcular la esperanza de una variable geométrica) Sea X una variable aleatoria geométrica de parámetro p. Considere
   $$Y = \begin{cases} 1 & \text{el primer ensayo es un éxito} \\ 0 & \text{el primer ensayo es un fracaso.} \end{cases}$$
   Utilice la variable Y para poder calcular la esperanza de X.

7. Una urna contiene a bolitas blancas y b bolitas negras. Se va extrayendo sin reposición una bolita hasta que salga la primer bolita blanca. Sea X = cantidad de bolitas negras extraidas y sea $M_{a,b} = E(X)$. Calcular $M_{a,b}$.
Sugerencia: definir

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{la primer bolita es blanca} \\ 0 & \text{la primer bolita es negra} \end{cases}$$

y utilizar que $E(X) = E(X|Y)$, resolver la recurrencia que queda.