Probabilidad condicional

1. Hay 3 cajas A, B y C con 20 piezas cada una, conteniendo 20, 15 y 10 piezas buenas. La probabilidad de elegir la caja A es igual a la de B, y la de C es igual a su suma. Eligiendo al azar una caja se sacan de ella con reposición 2 piezas que resultan ser buenas. Hallar la probabilidad condicional de que provengan de la caja A.

2. Para el ejercicio 16 de la práctica 1:

   a) ¿Qué probabilidad le asignaría al $(4, 3, 1)$?

   b) Calcular la probabilidad de sacar un 5 en la primera prueba dado que se obtuvo 1 en la segunda.

3. Se dispone de dos urnas cuyo contenido es el siguiente.

   Urna A: 5 bolitas rojas y 3 blancas
   Urna B: 1 bolita roja y 2 blancas

   Se arroja un dado equilibrado. Si el resultado es 3 ó 6, se extrae una bolita de la urna A que se coloca en la urna B y luego se extrae una bolita de B. En caso contrario, el proceso se hace a la inversa.

   a) Hallar la probabilidad de que ambas bolitas sean rojas.

   b) Si ambas bolitas son del mismo color, ¿cuál es la probabilidad de que sean blancas?

4. *a*) Un dado se tira tantas veces como sea necesario para que aparezca un as. Suponiendo que el as no aparece en el primer tiro, ¿cuál es la probabilidad de que sean necesarios más de 3 tiros?

   b) Supongamos que el número de tiros sea par, ¿ cuál es la probabilidad de que sea 2?

5. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que al tirar sucesivamente una moneda equilibrada, salga cara por primera vez en la n-ésima tirada, sabiendo que salió por lo menos una vez entre las $(m + n)$ primeras tiradas? $m \geq 1$.

6. Cuando se realiza un análisis de laboratorio para diagnosticar una cierta enfermedad en un paciente se está frente a la posibilidad de cometer dos tipos de errores en el diagnóstico. Sean E el evento "la persona examinada está enferma" y A el evento "el resultado del análisis es positivo, es decir que el análisis concluye que la persona examinada contrajo la enfermedad". Por supuesto, ambos eventos no tienen por qué coincidir (aunque eso sería lo deseable). Cuando no lo hacen, hay un error de diagnóstico: si el análisis da positivo pero el paciente está sano se dice que tenemos un falso positivo, si en cambio el análisis da negativo pero el paciente está enfermo se dice que tenemos un falso negativo. Para cada análisis se conocen la sensibilidad del test, es decir, la $P(A|E)$ y la especificidad del test, es decir, $P(A^c|E^c)$.

   a) Supongamos que una prueba de laboratorio en particular es tal que

   $$P(A|E) = P(A^c|E^c) = 0{,}95.$$

   y que la probabilidad de que un paciente que se examina padezca la enfermedad es 0,005 (prevalencia de la enfermedad). ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cuyo análisis diagnóstico es positivo en realidad esté enferma?

   b) Sean ahora

   $$P(A|E) = P(A^c|E^c) = p \qquad\qquad P(E) = 0{,}005.$$

   ¿Para qué valor de p es $P(E|A) = 0{,}95$? Interpretar la respuesta.

7. Felipe busca sus medias rojas para vestirse para ir al dentista. En su placard hay n cajones en los cuales pueden estar sus medias. Sea p_i la probabilidad de que estén en el cajón i. Felipe, apurado, le da un vistazo rápido al contenido de los cajones, de manera tal que si las medias están en el cajón i, la probabilidad de que las vea es α_i, pero si las medias no están en el cajón i, la probabilidad de que las vea ahí es 0. Calcular la probabilidad de que las medias estén en el cajón j, dado que al mirar en el i-ésimo cajón no las vio.

   Sugerencia: Considerar separadamente los casos $j = i$, $j \neq i$.

8. Se tienen $n + 1$ urnas numeradas $0, 1, \ldots, n$. La urna i tiene i bolillas blancas y $n - i$ negras. Se elige al azar una urna,

   a) y se extrae de ella una bolilla al azar,
      i. hallar la probabilidad de que la bolilla extraída sea blanca.
      ii. Si la bolilla extraída fue blanca, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la urna i, $0 \leq i \leq n$?

   b) y se realizan k extracciones con reposición de la urna elegida,
      i. hallar la probabilidad de que las k bolillas extraídas sean blancas.
      ii. Sabiendo que las k bolillas extraídas son blancas, si se realiza una nueva extracción de esa misma urna, ¿cuál es la probabilidad de que esta última bolilla sea blanca?

9. Un modelo simplificado del pronóstico del tiempo
   Supongamos que el tiempo (seco o lluvioso) de mañana tendrá probabilidad p de ser el mismo que el de hoy.

   a) Si el día 1^0 de enero fue lluvioso, mostrar que $p_n =$ probabilidad de que el día (n+1)-ésimo de ese año sea lluvioso satisface

   $$\begin{cases} p_n &= (2p-1)p_{n-1} + (1-p) \quad n \geq 1 \\ p_0 &= 1 \end{cases}$$

   b) Probar que

   $$p_n = \frac{1}{2}[1 + (2p-1)^n] \quad n \geq 0$$

10. Consideremos el siguiente experimento llamado **Esquema de Polya**. De un bolillero que contiene B bolillas blancas, $B \geq 1$ y R rojas, $R \geq 1$ se extraen sucesivamente y al azar n bolillas, $n \geq 2$, devolviendo cada bolilla extraída al bolillero junto con otras c bolillas del mismo color, $c \geq 1$. Hallar la probabilidad de que

    i. se obtenga una roja en la segunda extracción.
    ii. se obtenga una roja en la n-ésima extracción. Nótese que dicha probabilidad no depende de n.
    iii. se obtenga una roja en la tercera extracción dado que en la segunda se obtuvo una roja.
    iv. se haya obtenido una roja en la primera extracción dado que se obtuvo una roja en la n-ésima.

Independencia

11. Se extrae al azar una bolilla de una urna que tiene 9 bolillas de las cuales 3 son blancas, 3 son negras y 3 son rojas, numeradas 1, 2, 3 en cada color. Además las siguientes bolillas son rayadas: $n°$ 1 blanca, $n°$ 2 negra y $n°$ 3 roja.
    Sean los sucesos:
    A: “la bolilla es número 1”
    B: “la bolilla es blanca”
    C: “la bolilla es rayada”

a) ¿Son los sucesos A, B, y C independientes de a pares?

b) ¿Son independientes los sucesos A, B y C?

12. Sean a, b y c tres jugadores que juegan por turnos a un juego que nunca se empata de acuerdo con la siguiente regla:
Empiezan a y b. El perdedor es reemplazado por c. El juego continua de esta manera (el ganador juega con el que estaba afuera) hasta que un jugador gane 2 veces consecutivas convirtiéndose en el ganador del juego.

   a) Escribir un espacio muestral.

   b) Supongamos que en cada partido cada uno de los 2 jugadores tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de ganar.

      i. Calcular $P(a \quad a)$ y $P(a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad b)$.

      ii. Sea B_i el evento .$^{\text{el}}$ jugador a gana el partido i-ésimo". Hallar $P(B_1)$, $P(B_2)$ y $P(B_1 \cap B_2)$. ¿Son independientes los eventos B_1 y B_2?

      iii. Sea A_4 el evento el juego termina en el cuarto encuentro. Calcular $P(A_4)$.

      iv. Sea $w = (a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad a \quad c \quad b \quad \ldots \quad)$. Calcular $P(w)$.

      v. Mostrar que la probabilidad de que a gane es $5/14$ y calcular la de los otros dos. Verificar que las probabilidades de ganar no son iguales para los tres jugadores (de paso, ¿conviene o no jugar el primer partido?)

13. *a*) Probar que el evento A es independiente de cualquier evento B si y sólo si $P(A) = 1$ ó 0.

   b) Si $A \subset B$ y A y B son independientes entonces $P(A) = 0$ ó $P(B) = 1$.

   c) Probar que si:

      i. A es independiente de $B \cap C$ y $B \cup C$,

      ii. B es independiente de $A \cap C$,

      iii. C es independiente de $A \cap B$,

      iv. $P(A), P(B), P(C) > 0$,

   entonces A, B y C son independientes.

   d) Probar que si $B_i = A_i$ o $B_i = A_i^c$, siendo A_i independientes, $1 \leq i \leq n$ entonces

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{m} B_i\right) = \prod_{i=1}^{m} P(B_i), \quad \forall \quad 1 \leq m \leq n$$

   con lo cual $B_1 \ldots B_m$ son independientes, $\forall \quad 1 \leq m \leq n$.
   Sugerencia: Hacer inducción en el número de complementos de A_i involucrados.

14. Sean $S_1 \ldots S_n$ eventos independientes. Describir mediante uniones y/o intersecciones de ellos y hallar la probabilidad de que de los S_i ocurra:

   a) al menos uno.

   b) exactamente uno.

   c) ninguno.

   d) exactamente k en el caso $P(S_i) = p, \qquad 1 \leq i \leq n$.

15. *a*) De un bolillero que contiene n bolillas numeradas $1, 2, \ldots, n$ se extrae una al azar. Sea p un número primo y A_p el evento: "el número de la bolilla elegida es divisible por p". Probar que si $p_1, p_2, \ldots$ son distintos divisores primos de n entonces los eventos $A_{p_1}, A_{p_2}, \ldots$ son independientes.

b) Sea $\varphi(n)$ la función de Euler de la teoría de números, es decir $\varphi(n)$ es el número de enteros coprimos con n y menores o iguales que n. Demostrar que

$$\varphi(n) = n \prod_{p \text{ primo}:\ p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Rincón Histórico

Thomas Bayes (1702-1761), matemático inglés y sacerdote protestante. Originador de la famosa "fórmula de Bayes", que figuró en su trabajo matemático más importante: "An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances", publicado en 1763, dos años después de su muerte. La investigación a partir de dicha fórmula permitió el desarrollo posterior de problemas inversos en probabilidad que eventualmente llevaron a lo que ahora se conoce como estadística bayesiana, en contrapartida de los modelos clásicos frecuentistas. La estadística frecuentista basa sus conclusiones exclusivamente (hasta cierto punto...) en una información objetiva proveniente de la muestra o del ensayo en cuestión. En oposición, la estadística bayesiana, de cierto caracter polémico, permite incorporar en el análisis conocimiento subjetivo obtenido a priori, independiente en principio del ensayo. Podría en principio modelar el aprendizaje en el proceso de la inferencia estadística. En cierta forma, el modelo bayesiano generaliza el frecuentista, con la pega de requerir un mayor número de supuestos y de conllevar un costo adicional en complejidad del modelo probabilístico.

Se sospecha que la principal influencia matemático-probabilística de Thomas Bayes se debe encontrar en la figura de Abraham De Moivre (1667-1754), matemático francés, reconocido dentro de la teoría de las probabilidades por su trabajo sobre la distribución normal (la "campana de Gauss") y las posibilidades que ofrece la misma para aproximar probabilidades que normalmente serían de dificultoso cálculo. Es decir, lo que sería una primera versión de lo que posteriormente se daría a conocer como el teorema central del límite (que estudiaremos en esta materia), uno de los resultados cruciales de la teoría de probabilidades, con infinidad de aplicaciones en diversos campos, entre ellos en la estadística. No se exageraría (mucho..) al decir que el teorema central del límite es el que en el fondo le da un sentido práctico a la disciplina estadística.