"Alea jacta est" - Julio César

1. Dar un espacio muestral adecuado para cada uno de los siguientes experimentos:

   a) Se arroja un dado dos veces.

   b) Se arroja un dado hasta que aparece el primer as.

   c) De una caja que contiene 5 bolillas numeradas del 1 al 5, se extraen dos bolillas de dos maneras distintas: (i) con reposición y (ii) sin reposición.

   d) Se elige al azar un punto en el círculo unitario.

2. Se arroja dos veces un dado equilibrado. Sean los eventos:

   $A = \{$La suma de los resultados es par$\}$

   $B = \{$La suma de los resultados es 8$\}$

   $C = \{$Ambos resultados son distintos$\}$

   Explicitar el espacio muestral y calcular las probabilidades de A, B, C, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $A - C$.

3. *a*) Pruebe la siguiente fórmula:

   $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

   b) Proponga (y si quiere demuestre) una fórmula similar para

   $$P(A \cup B \cup C \cup D)$$

4. Una clase está formada por 17 chicos y 13 chicas. ¿De cuántas formas distintas puedo hacer un grupo de 7 alumnos? ¿Y si el grupo tiene que tener 4 chicas y 3 chicos?

   Zapatos y medias...

5. Felipe es medio despistado y cuando lava sus medias nunca forma pares, simplemente decide tomar de su cajón un par al azar. En este hay 10 medias negras, 8 azules y 6 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color?

6. En un ropero hay n pares de zapatos. Si se eligen al azar $2r$ zapatos (con $2r < n$) ¿Cuál es la probabilidad de que

   a) no haya ningún par completo?

   b) haya exactamente un par completo?

   c) haya exactamente dos pares completos?

   d) haya al menos un par completo?

   Sin reposición vs. con reposición

7. Un bolillero contiene N bolillas numeradas 1, 2,..., N. Se sacan una a una n bolillas $1 \leq n \leq N$, sin devolver al bolillero cada bolilla obtenida. Sean m y k enteros tales que $1 \leq m \leq N$ y $1 \leq k \leq n$. Hallar la probabilidad de que

   a) se extraiga la bolilla m en la k-ésima extracción.

b) se extraiga la bolilla m.

c) el máximo número obtenido sea m.

d) el máximo número obtenido sea $\leq m$.

e) dados a, $b \in \mathbb{N}$, $n \leq a < b \leq N$, el máximo número obtenido está entre a y b inclusive.

f) los números de las bolillas extraídas en el orden en que fueron extraídas constituyan una sucesión estrictamente monótona.

8. Resolver el ejercicio 7 en el caso en que cada bolilla obtenida sea devuelta al bolillero (es decir, con reposición).

9. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y N negras se extraen sin reemplazo n bolillas, $1 \leq n \leq B + N$.

   Hallar la probabilidad de que la k-ésima bolilla extraída, $1 \leq k \leq \text{mín}\,\{n, B, N\}$, sea

   i. blanca.

   ii. la primer blanca obtenida.

Bose-Einstein / Maxwell-Boltzman

10. Si se colocan 6 bolillas en 4 cajas de acuerdo con la estadística de Bose-Einstein, es decir, bolillas indistinguibles entre sí en cajas distinguibles (es decir, numeradas) ¿cuál es la probabilidad de que la primera urna contenga

    i. exactamente una bolilla?

    ii. exactamente dos bolillas?

    iii. al menos una?

    ¿Cuál es la probabilidad de que

    a) todas las celdas estén ocupadas?

    b) al menos 3 celdas estén ocupadas?

11. *a*) Probar la siguiente fórmula

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} (-1)^{k+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1+1}^{n} \sum_{i_3=i_2+1}^{n} \cdots \sum_{i_k=i_{k-1}+1}^{n} (-1)^{k+1}\, P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}).
\end{aligned}
$$

    b) ¿Cómo queda la fórmula anterior si los eventos cumplen $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = b_k$ para todo $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$? (Debería obtenerse una expresión con una sola sumatoria).

12. Se reparten N bolillas distinguibles en n urnas distinguibles de tal modo que cada bolilla tiene la misma probabilidad de llegar a una urna cualquiera sea ésta (o sea, según la estadística de Maxwell-Boltzman). Sea A_i el suceso: "la i-ésima urna no está vacía".

    Mostrar que

$$
V_k = P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \left(1 - \frac{j}{n}\right)^N, \qquad k \leq n
$$

    Observar que dicha probabilidad no depende de los índices $i_1, \ldots i_k$ elegidos.

13. Resolver el problema 10 para la estadística de Maxwell-Boltzman, es decir, bolillas distinguibles (numeradas) en cajas distinguibles (numeradas).

14. Consideremos el caso que hemos tomado una muestra aleatoria con reposición de tamaño r de una población de n elementos $a_1, \ldots, a_n$ (supongamos equiprobabilidad en dicho espacio). Sea A el evento "en la muestra obtenida $a_{j_1}, \ldots, a_{j_r}$ no hay elementos repetidos".

    a) Hallar $P(A)$.

    b) Los cumpleaños de r personas forman una muestra de tamaño r de la población de todos los días del año. Si bien los años no son todos iguales en longitud, y sabemos que los porcentajes de nacimientos no son constantes a través del año, como una primera aproximación podemos considerar que una elección al azar de personas sea equivalente a realizar una selección al azar de las fechas de nacimientos y considerar que el año es de 365 días.
    Hallar la probabilidad de que entre r personas elegidas al azar todas tengan distintas fechas de cumpleaños.
    El resultado numérico es sorprendente (para algunas personas...). Por ejemplo para $r = 23$ tenemos que $p < \frac{1}{2}$, o sea que entre 23 personas, la probabilidad de que al menos 2 cumplan años el mismo día es $> \frac{1}{2}$ (para $r = 30$, $p = 0{,}294$).

15. *a*) n parejas casadas se han reunido a bailar. Cada caballero tiene la misma probabilidad de bailar con cualquier dama. ¿Cuál es la probabilidad de que ningún caballero baile con su propia mujer?

    b) Sea $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n > 1$. Hallar el número e biyecciones de I_n en I_n con al menos un punto fijo.

16. De un bolillero que contiene 5 bolillas numeradas 1, 2, 3, 4, 5 se extrae una al azar; sea la número k. Se hace una segunda extracción al azar entre las bolillas de número menor o igual que k; sea la número j. Por último se hace una extracción al azar entre las bolillas de número menor o igual que j.

    a) Describir el espacio muestral para este experimento y determinar el número de sus elementos.

    b) ¿Es razonable pedir equiprobabilidad en este espacio? ¿Qué probabilidad le asignaría al $(1, 1, 1)$?

Rincón Histórico

Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827): astrónomo, físico y matemático francés. Reconocido por sus importantes aportes al cálculo, a la mecánica celeste, y, en lo que nos concierne, a la teoría de probabilidades. Da el nombre al conocido "modelo de Laplace" para el cálculo de probabilidades en condiciones de alta simetría (equiprobabilidad). Fuerte impulsor del mecanicismo como modelo explicativo del universo, tal como se puede apreciar en la siguiente frase:

~~"Soy un fuerte impulsor del mecanicismo como modelo explicativo del universo"~~

"Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría condensar un intelecto que en cualquier momento dado sabría todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen, si este intelecto fuera lo suficientemente vasto para someter los datos al análisis, podría condensar en una simple fórmula de movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro así como el pasado estarían frente a sus ojos."