Geometría Proyectiva

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2009

Práctica S/N - Producto vectorial

1. Sean $v_1, \ldots, v_n$, n vectores en $\mathbb{R}^{n+1}$. Observemos que la aplicación $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(v) = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ v \end{pmatrix}$$
es un transformación lineal

   Definición:

   Llamaremos *producto vectorial de los vectores* $v_1, \ldots, v_n$ al único vector w que verifica $f(v) = \langle v, w \rangle$ ($\forall\, v \in \mathbb{R}^{n+1}$). A w lo notaremos con $v_1 \times \cdots \times v_n$.

2. *a*) Verificar que $v_1 \times \cdots \times v_n$ es ortogonal a cada uno de los v_i, $(1 \leq i \leq n)$.

   b) Probar que $v_1 \times \cdots \times v_n = 0$ si y sólo si los vectores $v_1, \ldots, v_n$ son linealmente dependientes.

   c) Verificar que la base $\{v_1, \ldots, v_n, v_1 \times \cdots \times v_n\}$ está orientada positivamente. (Es decir, la matriz de cambio de base entre la base canónica y $\{v_1, \ldots, v_n, v_1 \times \cdots \times v_n\}$ tiene determinante positivo).

3. Probar que la aplicación $\times : \mathbb{R}^{n+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por $\times(v_1, \ldots, v_n) = v_1 \times \cdots \times v_n$ es multilineal y alternada. (Esto es evidente por la definición.)

   De ahora en más $n = 2$.

4. Probar las siguientes relaciones entre el producto vectorial y el producto interno

   a) $\langle u \times v, x \times y \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle u, x \rangle & \langle v, x \rangle \\ \langle u, y \rangle & \langle v, y \rangle \end{pmatrix}$

   b) $(u \times v) \times w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$

   (Sugerencia: dado que ambos lados son multilineales, alcanza con probar la igualdad para los vectores de la base canónica.)

5. Deducir del item a) del ejercicio anterior que
$$|u \times v|^2 = |u|^2 |v|^2 (1 - \cos^2 \theta) = A^2$$
donde A es el área del paralelogramo generado por u y v.