Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre 2009

Práctica 8 - Curvas Algebraicas

1. Sea $f \in K[x, y]$ y sea p un punto singular de la curva afin $C(f)$ definida por f. Probar que p es un nodo si y sólo si $f_{xy}^2(p) \neq f_{xx}(p)f_{yy}(p)$.

2. Probar que $(0, 0)$ es un punto singular de las siguientes curvas afines. Calcular las rectas tangentes de cada curva en ese punto.

   a) $C_1 = C(y^2 - x^3)$ *b*) $C_2 = C(y^2 - x^3 - x^2)$

   c) $C_3 = C((x^2 + y^2)^2 + 3x^2y - y^3)$ *d*) $C_4 = C((x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2)$

3. Probar que la curva en $\mathbb{R}^2$ definida en coordenadas polares por

$$r = 4a\cos^3(\theta/3) \qquad -3\pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$$

   es una séxtica con ecuación $4(x^2 + y^2 - ax)^3 = 27a^2(x^2 + y^2)^2$.
   Esta curva se conoce como la **Séxtica de Cayley**.

4. Probar que las curvas en $\mathbb{C}^2$ dadas paramétricamente por

$$\alpha(t) = (a\sin(nt + d), b\sin(t))$$

   (curvas de Lissajous) son algebraicas si n es racional. Calcular su ecuación.

   Sugerencia: $\sin(t) = (e^{it} - e^{-it})/2i$.

5. Expresar la curva proyectiva de ecuación $x^2z - xy^2 - 2xyz - y^2z - 2yz^2$ en cada uno de los siguientes sistemas de coordenadas:

   a) Un sistema con $(1 : 1 : -1)$, $(1 : 0 : -2)$, $(1 : 0 : 0)$ y $(0 : 1 : 0)$ como su cuadro de referencia.

   b) Algún sistema afín que tenga a $x + z = 0$ como su recta del infinito.

6. Estudiar las singularidades en $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ y $(0 : 0 : 1)$ de la siguiente curva proyectiva:

$$\mathcal{C} = C(x^2y^5 - x^5y^2 - 2xy^5z + x^5z^2 + y^5z^2 - x^3yz^3 + 2\alpha x^2y^2z^3 - xy^3z^3)$$

   con $\alpha \in \mathbb{C}$.

7. Hallar los puntos singulares de las curvas proyectivas definidas por las ecuaciones:

   a) $xz^2 - y^3 + xy^2 = 0$.

   b) $(x + y + z)^3 - 27xyz = 0$.

c) $x^2y^2 + 36xz^3 + 24yz^3 + 108z^4 = 0$.

8. Hallar los valores de $m \in \mathbb{C}$ tales que la curva proyectiva
$$C_m = C(x^3 + y^3 + z^3 + m(x + y + z)^3)$$
tenga al menos un punto singular. Para tales m decidir si C_m se descompone como unión de tres rectas.

9. Mostrar que si $\alpha \neq 2, 3, 6$ entonces la curva proyectiva
$$C = C(xy^2 + yz^2 + zx^2 + x^2y + y^2z + z^2x + \alpha xyz)$$
es no singular.

10. Mostrar que para cada $n > 0$ hay curvas en el plano proyectivo complejo no singulares y de grado n.

11. Sea $X = C(F) \subset \mathbb{P}^2(k)$ con F homogéneo de grado d.
Sea $p = (a : b : c) \in X$ un punto no singular y sea L la ecuación de la recta tangente proyectiva a X en p. Probar que la deshomogeneización L_* (respecto a la primera variable) es la ecuación de la recta tangente afín a F_* en el punto $(b/a, c/a)$ (suponiendo $a \neq 0$).

12. Demostrar que una curva algebraica $X \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ de grado d tiene un punto singular p de multiplicidad d si y sólo si X consiste de d rectas por p.

13. Demostrar el teorema de Bezout en el caso en que una de las curvas es una recta.

14. Sea $f(x, y) = y - g(x)$ con g un polinomio complejo de grado n, y sea $X = C(f) \subset \mathbb{C}^2$ la curva afín definida por f. Si $H_a = (y - a = 0)$ es una recta horizontal, probar que el número total de intersecciones (contadas con multiplicidad) $X \cap H_a$ es igual a n. Si $V_a = (x - a = 0)$ es una recta vertical, el numero total de intersecciones $X \cap V_a$ es igual a 1. Cómo se concilia esto con el teorema de Bezout ?

15. Demostrar que toda curva algebraica en el plano proyectivo complejo, de grado mayor o igual que tres, tiene al menos un punto de inflexión. Verificar que toda cónica no singular no tiene puntos de inflexión.

    Sugerencia: usar que los puntos de inflexion son las intersecciones de la curva con su curva Hessiana.

16. Para $m \in \mathbb{C}$, sea C_m la cúbica en $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definida por el polinomio
$$x^3 + y^3 + z^3 + 3mxyz$$
    a) Verificar que C_m es singular sii m es alguna de las raíces de $x^3 + 1$.

    b) Probar que cuando C_m es singular, se descompone como unión de tres rectas.

    c) Verificar que $(0 : 1 : -1)$, $(-1 : 0 : 1)$, $(1 : -1 : 0)$, $(0 : 1 : \alpha)$, $(\alpha : 0 : 1)$, $(1 : \alpha : 0)$, $(0 : 1 : \beta)$, $(\beta : 0 : 1)$ y $(1 : \beta : 0)$ son todos los puntos de inflexión de C_m, donde α y β son las raíces de $x^3 + 1$ distintas de -1.