Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre 2009

Práctica 7 - Polinomios

1. Dado k un cuerpo, se define $k[X_0, \dots, X_n]_d$ como el subconjunto de $k[X_0, \dots, X_n]$ formado por los polinomios homogéneos de grado d.

   a) Probar que $k[X_0, \dots, X_n]_d$ es un espacio vectorial y que los monomios de grado d forman una base de dicho espacio.

   b) Probar que $\dim(k[X_0, \dots, X_n]_d) = \begin{pmatrix} n+d \\ d \end{pmatrix}$.

2. Dado $f \neq 0$ en $f[X_0, \dots, X_n]$, probar que $f \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ si y sólo si
$$f(tX_0, \cdots, tX_n) = t^d f(X_0, \cdots, X_n)$$
en $k[t, X_0, \cdots, X_n]$.

3. Dado $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$, probar la "fórmula de Euler": $\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = dF$.

4. Sean $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ y $f \in k[X_1, \dots, X_n]$. Definimos
$$F_*(X_1, \dots, X_n) = F(1, X_1, \dots, X_n)$$
y
$$f^*(X_0, \dots, X_n) = X_0^d f\Big(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\Big)$$
donde $d = \mathrm{gr} f$.

   a) Probar que $(FG)_* = F_* G_*$ y que $(fg)^* = f^* g^*$.

   b) Probar que $(f^*)_* = f$ y que $X^r (F_*)^* = F$, donde r es la mayor potencia de X_0 que divide a F.

   c) Probar que $(F+G)_* = F_* + G_*$ y que $X_0^t (f+g)^* = X_0^e f^* + X_0^d g^*$, donde $d = \mathrm{gr} f$, $e = \mathrm{gr} g$ y $t = d + e - \mathrm{gr}(f+g)$.

5. Sea $F \in k[X_0, \dots, X_n]_d$ tal que X_0 no divide a F. Sea $f = F_* \in k[X_1, \dots, X_n]$. Probar que:

   a) $\mathrm{gr} f = \mathrm{gr} F$

   b) Todo divisor no nulo de F es homogéneo.

   c) Existe una correspondencia biyectiva entre los divisores de F y los de f. Concluir que F es irreducible si y sólo si f lo es.

6. Demostrar que si $F \in k[X, Y]_n$ con k algebraicamente cerrado, entonces existen $a_i, b_i \in k$, no ambos nulos, tales que
$$F(X, Y) = \prod_i (a_i X - b_i Y).$$

7. Sean F, $G \in k[X_0, \ldots, X_n]$ dos polinomios homogéneos de grados r y $r+1$ sin factores comunes. Probar que $F+G$ es un polinomio irreducible.

8. Sean k un cuerpo infinito y $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ un polinomio que verifica $f(a_0, \ldots, a_n) = 0$ para todo $(a_0, \ldots, a_n) \in k^n$. Demostrar que f es idénticamente nulo.

9. Sean $f, g \in k[X]$ dos polinomios de grado positivo,

$$f = f_o + f_1 X + \cdots + f_n X^n \ , \quad f_n \neq 0$$

$$g = g_0 + g_1 X + \cdots + g_m X^m \ , \quad g_m \neq 0$$

se define su **resultante** como el determinante de la siguiente matriz de $k^{(m+n)\times(m+n)}$

$$R(f,g) = \left\| \begin{array}{ccccccccc} f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n & & & \\ & f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & f_0 & f_1 & \cdots & \cdots & \cdots & f_n \\ g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m & & & & \\ & g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & g_0 & g_1 & \cdots & \cdots & g_m \end{array} \right\|$$

Se denomina **discriminante** de $f \in k[X]$ a la resultante de f y f', es decir

$$\Delta(f) = R(f, f').$$

Probar que son equivalentes:

a) f y g tienen un factor común de grado positivo.

b) Existen polinomios no nulos ϕ, $\psi \in k[X]$ de grados menores que n y m respectivamente, tales que $\psi f = \phi g$.

c) Existen polinomios A y $B \in k[X]$ tales que $\mathrm{gr}A < \mathrm{gr}g$, $\mathrm{gr}B < \mathrm{gr}f$ y $Af + Bg = 0$.

d) $R(f,g) = 0$.

10. Dados $f, g \in k[X,Y]$, consideramos f y g como polinomios en $D[Y]$, donde $D = k[X]$. Esto es,

$$f = f_0 + f_1 Y + \cdots + f_n Y^n \ , \quad f_n \neq 0$$

$$g = g_0 + g_1 Y + \cdots + g_m Y^m \ , \quad g_m \neq 0$$

con $f_i, g_j \in D$. Reescribir los resultados del ejercicio 9 aplicados a este caso.

11. Sea k cuerpo algebraicamente cerrado. Sean $f, g \in k[X_1, \cdots, X_r]$, f irreducible. Probar que si para toda r-upla $(a_1, \cdots, a_r) \in k^r$ tal que $f(a_1, \cdots, a_r) = 0$ se satisface $g(a_1, \cdots, a_r) = 0$, entonces f divide a g.

12. Sean $F, G \in k[X_0, X_1, \cdots, X_r]$ homogéneos de grado n, m respectivamente. Supongamos que

$$F = A_n + A_{n-1}X_0 + \cdots + A_0 X_0^n$$

$$G = B_m + B_{m-1}X_0 + \cdots + B_0 X_0^m$$

con $A_i, B_i \in k[X_1, \cdots, X_r]_i$, y $A_0 B_0 \neq 0$. Sea $R(X_1, \cdots, X_r)$ la resultante de F y G respecto de X_0. Probar que $R \in k[X_1, \cdots, X_r]_{mn}$.

13. Sea k cuerpo algebraicamente cerrado. Sean $f, g \in k[X]$ mónicos, de modo que

$$f = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \quad \text{y} \quad g = \prod_{j=i}^{m} (x - \beta_j).$$

Probar que

$$R(f, g) = a \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j) \qquad a \neq 0, a \in k.$$

14. Sea T un cambio de coordenadas lineal $T : \mathbb{P}^r(k) \to \mathbb{P}^r(k)$ $(r \geq 2)$. Probar que:

    a) T induce un isomorfismo de $\tilde{T} : k[X_0, \cdots, X_r]_n \to k[X_0, \cdots, X_r]_n$ para todo $0 \leq n$.

    b) Dado $F \in k[X_0, \cdots, X_r]_n$, existe un cambio de coordenadas lineal $T : \mathbb{P}^r(k) \to \mathbb{P}^r(k)$ tal que $\tilde{T}(F) = A_d + A_{d-1}X_0 + \cdots + A_0 X_0^n$ con $A_i \in k[X_1, \cdots, X_r]_i$.

    c) Dados F, G homogéneos de grado n, m respectivamente, existe un cambio de coordenadas de manera que en el nuevo sistema, se tiene

    $$F = A_n + A_{n-1}X_0 + \cdots + A_0 X_0^n$$

    $$G = B_m + B_{m-1}X_0 + \cdots + B_0 X_0^m$$

    con $A_i \in k[X_1, \cdots, X_r]_i$ y $A_0 B_0 \neq 0$.