Geometría Proyectiva

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2009

Práctica 6 - Geodésicas

1. Mostrar que si $\varphi(u,v)$ es una parametrización ortogonal (es decir, $F=0$), se tiene que:
$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)$$

2. Justificar por qué las siguientes superficies no son localmente isométricas:
   a) La esfera.
   b) El cilindro.
   c) La silla de montar $\{z = x^2 - y^2\}$.

3. Mostrar que si todas las geodésicas de una superficie conexa son curvas planas, entonces la superficie está contenida en una esfera o un plano.

4. Sean $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva de coordenadas $(r(s), z(s))$ y S la superficie de revolución dada por $\varphi(s,\theta) = (r(s)\cos\theta, r(s)\sin\theta, z(s))$.
   a) Mostrar que los meridianos, esto es, las curvas de ecuación $\theta = \theta_0$ son geodésicas.
   b) Mostrar que el círculo de ecuación $s = s_0$ es una geodésica sii todos los vectores tangentes a las curvas $s \mapsto \varphi(s, \theta_0)$ son paralelos al eje de rotación de la superficie (en este caso el eje z) en s_0.

5. Hallar las geodésicas de:
   a) Un plano.
   b) Una esfera.
   c) Un cilindro.
   d) Un cono circular recto.

6. Escribir la ecuación diferencial de las geodésicas para la superficie $F(x,y,z) = 0$. Especializar para $z = f(x,y)$.

7. Sea α una curva en M con curvatura nunca nula. Probar que α es una curva asintótica sii el plano osculador a la curva en $\alpha(t)$ coincide con el plano tangente a la superficie en $\alpha(t)$ (para todo t).

8. Probar que una geodésica es una curva asintótica sii es una recta.

9. Probar que las geodésicas de un helicoide recto se pueden determinar usando integrales elípticas.
   Ver Struik sec. [4.2].