Geometría Proyectiva

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2009

Práctica 5 - Superficies - Segunda Parte

1. Mostrar que en un punto hiperbólico, las direcciones principales bisectan las direcciones asintóticas.
   Sugerencia: analizar la indicatriz de Dupin.

2. Mostrar que si una superficie S es tangente a un plano P a lo largo de una curva $C \subset S$, entonces los puntos de C son puntos planares o parabólicos de S.

3. Describir las regiones de S^2 cubiertas por la aplicación de Gauss para las siguientes superficies:

   a) Paraboloide de revolución:
   $$z = x^2 + y^2;$$

   b) Hiperboloide de revolución:
   $$x^2 + y^2 - z^2 = 1;$$

   c) Catenoide:
   $$x^2 + y^2 = \cosh^2(z).$$

4. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ las curvaturas normales en $p \in S$ en las direcciones que forman ángulos de $0, 2\pi/m, \ldots, 2(m-1)\pi/m$ respectivamente con una dirección principal. Probar que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = mH$ donde H es la curvatura media en p.
   Sugerencia: considerar el teorema de Euler.

5. *a*) Si S es una superficie reglada, hallar las expresiones para su primera y segunda formas fundamentales, su curvatura de Gauss y estudiar las direcciones principales.

   b) Idem para una superficie
   $$S = \{(x, y, z) : f(x, y, z) = 0\}$$
   dada en forma implícita.

6. Determinar las curvas asintóticas y las líneas de curvatura de
   $$S = \{(x, y, z) : z = xy\}.$$

7. En este ejercicio se analiza la pseudoesfera, una superficie relacionada con el tema de las Geometrías no-Euclideanas (ver Struik).

   a) Determinar una ecuación para la curva plana C con la propiedad de que la longitud del segmento de la recta tangente entre el punto de tangencia y la intersección con una recta $L \subset \mathbb{R}^2$ que no corta la curva es constantemente 1. Esta curva es la tractriz.

b) Por rotación de la tractriz alrededor de la recta L se obtiene el conjunto S, denominado pseudoesfera. Determinar si S es una superficie regular y hallar una parametrización en un entorno de un punto regular. Mostrar que la curvatura de Gauss en todo punto regular de la pseudoesfera es -1.

8. Sea $[\phi(v)\cos(u), \phi(v)\sin(u), \psi(v)]$ la parametrización de una superficie de revolución con curvatura Gaussiana constante k. Para determinar ϕ y ψ se elige v de modo que $(\phi')^2 + (\psi')^2 = 1$ (es decir que v es la longitud de arco de la curva generatriz). Mostrar que ϕ satisface

$$\phi'' + k\phi = 0 \quad \text{y} \quad \psi = \int \sqrt{1 - (\phi')^2} dv.$$

Se toma $0 < u < 2\pi$ y el dominio de v de modo que la última integral está definida.

9. Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = 1$ que intersecan perpendicularmente el plano xy están dadas por

$$\phi(v) = C\cos(v) \quad \text{y} \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sin^2(t)} dt$$

donde C es una constante. Determinar el dominio de v y hacer un gráfico de la curva cortada con el plano xz para los casos $C = 1$, $C > 1$ y $C < 1$. Observar que $C = 1$ representa S^2.

10. Todas las superficies de revolución con curvatura constante $k = -1$ son de uno de los siguientes tipos:

$$\phi(v) = C\cosh(v) \quad \text{y} \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \sinh^2(t)} dt;$$

$$\phi(v) = C\sinh(v) \quad \text{y} \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - C^2 \cosh^2(t)} dt;$$

$$\phi(v) = e^v \quad \text{y} \quad \psi(v) = \int_0^v \sqrt{1 - e^{2t}} dt.$$

Determinar el dominio de v y hacer un gráfico de cada superficie cortada con el plano xz.

11. Probar que las únicas superficies de revolución con curvatura constante $k = 0$ son el cilindro circular recto, el cono circular recto y el plano.

12. Considerar la superficie obtenida por la rotación de la curva $y = x^2$ con $-1 < x < 1$ alrededor de la recta $x = 1$. Mostrar que los puntos obtenidos por rotación del $(0, 0)$ son puntos planos de la superficie.

13. Determinar los puntos umbílicos del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (Ver Struik, sec. [2.6], al final).