Geometría Proyectiva

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2009

Práctica 5 - Superficies - Primera Parte

1. Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental de las siguientes superficies paramétricas, en los puntos regulares.

   a) Elipsoide:
   $$r(u,v) = (a\sin(u)\cos(v), b\sin(u)\sin(v), c\cos(u));$$

   b) Paraboloide eliptico:
   $$r(u,v) = (au\cos(v), bu\sin(v), u^2);$$

   c) Paraboloide hiperbólico:
   $$r(u,v) = (au\cosh(v), bu\sinh(v), u^2);$$

   d) Hiperboloide de dos hojas:
   $$r(u,v) = (a\sinh(u)\cos(v), b\sinh(u)\sin(v), c\cosh(u)).$$

2. Calcular los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera S^2 en la parametrización dada por la proyección estereográfica.

3. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana. Definimos el cilindro y el cono sobre α de la siguiente manera

$$\text{Cilindro} : \{(\alpha_1(u), \alpha_2(u), v) : \ (u,v) \in I \times \mathbb{R}\}.$$
$$\text{Cono} : \{(v\alpha_1(u), v\alpha_2(u), v) : \ (u,v) \in I \times \mathbb{R}\}.$$

   Demostrar que ambas superficies son localmente isométricas al plano (en los puntos regulares).

4. Mostrar que toda superficie de revolución puede ser reparametrizada de manera que los coeficientes de la primera forma fundamental sean
$$E = E(v) \qquad F = 0 \qquad G = 1.$$

5. Las curvas coordenadas de una parametrización $r(u,v)$ forman una red de Tchebyshev si las longitudes de los lados opuestos de cualquier cuadrilátero formado por ellas son iguales. Mostrar que una condición necesaria y suficiente para esto es que
$$\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{\partial G}{\partial u} = 0.$$
   Probar que si las curvas coordenadas de una parametrización forman una red de Tchebyshev, entonces es posible reparametrizar el entorno coordenado de modo que los nuevos coeficientes de la primera forma fundamental sean
$$E = 1 \qquad F = \cos(\theta) \qquad G = 1$$
   donde θ es el ángulo entre las curvas coordenadas.