Geometría Proyectiva

Segundo Cuatrimestre 2009

Práctica 4 - Subvariedades diferenciales de $\mathbb{R}^n$

1. Sean $d < m$ números naturales y sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto. Una d**-carta** de X es un par (U, φ) donde $U \subset \mathbb{R}^d$ es un abierto conexo no vacío y $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable, inyectiva y regular, y tal que la función inversa $\varphi^{-1} : \varphi(U) \to U$ es continua. Un d**-atlas** de X es una colección de d-cartas $\{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ tales que $\varphi_i(U_i) = X \cap U_i'$, para $U_i' \subset \mathbb{R}^m$ abierto y tal que $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i'$. Decimos que X es una **subvariedad diferencial de $\mathbb{R}^m$ de dimensión d** si existe un d-atlas de X.
   Supongamos que (U, φ) y (V, ψ) son dos cartas de un atlas de X tales que $W = \varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$. Demostrar que
   $$\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \to \psi^{-1}(W)$$
   es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^d$.

2. Probar que $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es una subvariedad diferencial de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1, exhibiendo un atlas.

3. Sea $f : \mathbb{R} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ definida por
   $$f(u, v) = \left(\left(1 + \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} u\right) \cos u, \left(1 + \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} u\right) \sin u, \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} u \right)$$
   Probar que $M = Im(f)$ es una subvariedad de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$. Es la cinta de Möbius.
   (Sugerencia: probar que las restricciones de f a los conjuntos $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-1, 1)$, $(0, \pi) \times (-1, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \times (-1, 1)$ y $(\pi, 2\pi) \times (-1, 1)$ son un atlas.)

4. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ subvariedades diferenciales de respectivas dimensiones d y e. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:
   a) Para todo $x_0 \in X$ existen $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $F : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tales que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in X \cap U$.
   b) Para toda carta (U, φ) de X la composición $f \circ \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable.
   c) Para toda carta (U, φ) de X y para toda carta (V, ψ) de Y la **expresión local** $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : A \to B$ es una función diferenciable, donde $A \subset \mathbb{R}^d$ y $B \subset \mathbb{R}^e$ son ciertos abiertos.

5. Sea $f : S^1 \to M$ (donde M es la cinta de Möbius) definida por $f(x, y) = (x, y, 0)$ para $(x, y) \in S^1$. Probar que f es diferenciable.

6. Con la notación anterior, sea $x \in X$ un punto y (U, φ) una carta con $x \in \varphi(U)$. Sea $u \in U$ el único punto tal que $x = \varphi(u)$. Consideramos la derivada $d\varphi(u) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ y definimos el **espacio tangente a X en x** como el subespacio lineal de $\mathbb{R}^m$
   $$TX(x) = d\varphi(u)(\mathbb{R}^d)$$

Demostrar que si $x = \psi(v)$ donde (V, ψ) es otra carta de X entonces

$$d\varphi(u)(\mathbb{R}^d) = d\psi(v)(\mathbb{R}^d)$$

de modo que $TX(x)$ es independiente de la carta elegida.

7. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ subvariedades diferenciales de respectivas dimensiones d y e. Sean $f : X \to Y$ una función diferenciable, $x_0 \in X$, $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto con $x_0 \in U$ y $F : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable tal que F y f coinciden en $X \cap U$. Demostrar que la derivada $dF(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ satisface $dF(x_0)(TX(x_0)) \subset TY(F(x_0))$ y por lo tanto induce por restricción una aplicación lineal $TX(x_0) \to TY(f(x_0))$ que denotamos $df(x_0)$. Demostrar que $df(x_0)$ no depende de la F elegida como extensión de f. Describir $df(x_0)$ en términos de la derivada de una expresión local de f. Demostrar que si $Z \subset \mathbb{R}^p$ es otra subvariedad y $g : Y \to Z$ es diferenciable entonces $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$ (regla de la cadena).

8. Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, $q \leq m$ y $F : U \to \mathbb{R}^q$ una función diferenciable tales que $0 \in \mathbb{R}^q$ es un **valor regular** de F (o sea, para todo $x \in U$ tal que $F(x) = 0$ vale que $dF(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ es sobreyectiva). Sea $X = F^{-1}(0)$. Demostrar:

   a) X es una subvariedad diferencial de dimensión $d = m - q$.
   En el caso $q = 1$ decimos que X es la **hipersuperficie definida por** F.

   b) $TX(x) = \ker dF(x)$, para todo $x \in X$. O sea, escribiendo $F = (F_1, \ldots, F_q)$ se tiene

   $$TX(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \sum_j \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} \, y_j = 0, \forall i \right\}$$

   c) Sea $V \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $F : V \to \mathbb{R}^q$ una función diferenciable. Consideramos el conjunto $F^{-1}(0) \subset V$. Sea $S(F) \subset V$ el conjunto de **puntos singulares** de F (o sea, puntos donde la derivada de F no es sobreyectiva). Demostrar que $S(F)$ es un cerrado y que $X = F^{-1}(0) - S(F)$ (si es no-vacío) es una subvariedad de dimensión $m - q$.

   d) Para todo $x \in V$ definimos $TF(x) = \ker dF(x)$; es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^m$ de dimensión $\geq m - q$. Si $x \in X = F^{-1}(0) - S(F)$ entonces $TF(x)$ tiene dimensión $m - q$ y $TF(x) = TX(x)$.
   Sugerencia: Utilizar el teorema de la función implícita.

9. Sea $S = \{(x, y, x)/x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Probar que S es una subvariedad diferencial de dimensión 2. Calcular su espacio tangente en el punto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

10. Sea F una cuádrica sin puntos singulares (esto es, de tipo B o C). Probar que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : \ F(x) = 0\}$ es una subvariedad diferencial de dimensión $n - 1$.

11. Sea $X \subset \mathbb{R}^m$ un subconjunto y sean d, e números naturales. Supongamos que existe un d-atlas para X y que también existe un e-atlas para X. Demostrar que $d = e$.

12. Sea $U \subset \mathbb{R}^d$ un abierto conexo y sea $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable, inyectiva y regular. ¿Es verdad que $X = \varphi(U)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^m$?

13. *a*) Hallar una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = C$ no es una variedad.

    b) Hallar una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = C$ es una variedad de dimensión distinta de $m - 1$.

    c) Sea $C \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto cerrado cualquiera. ¿Existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(0) = C$?

14. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{R}^{n\times n}$ de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes reales. Sea $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ la función determinante. Definimos

$$\Delta = \Delta(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det(a) = 0\}$$

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det(a) \neq 0\} = \mathbb{R}^{n\times n} - \Delta$$

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \det(a) = 1\}$$

Demostrar:

a) $GL(n, \mathbb{R})$ y $SL(n, \mathbb{R})$ son cerrados por producto de matrices y contienen a la matriz identidad. Por lo tanto, tienen estructura de grupo. Demostrar que ambos son subvariedades, de dimensiones respectivas n^2 y $n^2 - 1$.

b) det es un polinomio de grado n en n^2 variables. Demostrar que el conjunto de ceros regulares Δ_{reg} de det consiste de las matrices de rango $n-1$; es una variedad de dimension $n^2 - 1$. Demostrar también que det es un polinomio irreducible.

c) Sea $U \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ el conjunto de las matrices con autovalores distintos (nos referimos a todos los autovalores, reales y complejos). Demostrar que U es un abierto denso en $\mathbb{R}^{n\times n}$.

d) Sea $O(n, \mathbb{R}) = \{a \in \mathbb{R}^{n\times n},\ a.a^t = 1\}$. Demostrar que $O(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad diferencial de $\mathbb{R}^{n\times n}$; calcular su dimensión.
Sugerencia: Expresar $O(n, \mathbb{R})$ como imagen inversa de un valor regular.