

GEOMETRÍA PROYECTIVA

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2009

El objetivo de este curso es brindar una introducción a la Geometría Diferencial y a la Geometría Algebraica. El tema central es el estudio de subvariedades de espacios euclídeos, afines y proyectivos (reales y complejos). Consideraremos especialmente los siguientes ejemplos: curvas paramétricas, superficies en el espacio tridimensional, cuádricas y curvas algebraicas planas, afines y proyectivas.

PROGRAMA

1) Curvas paramétricas planas y espaciales.

Ejemplos. Longitud de arco, curvatura, torsión, ecuaciones de Frenet, teorema de clasificación ortogonal.

2) Variedades.

Subvariedades diferenciales de \mathbb{R}^n . Variedades algebraicas en K^n . Definiciones y ejemplos. Espacio tangente, puntos regulares y puntos singulares. Funciones diferenciables, derivada, fibrado tangente.

3) Cuádricas.

Clasificación ortogonal y afín, real y compleja. Rango, centro y puntos singulares. Otros problemas de clasificación, acción de un grupo en un conjunto, invariantes.

4) Superficies diferenciales en \mathbb{R}^3 .

Ejemplos: superficies de revolución, superficies regladas. Primera forma fundamental. Aplicación de Gauss, segunda forma fundamental, curvatura media y Gaussiana. Direcciones principales. Puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos. Ecuaciones de compatibilidad, teorema de clasificación ortogonal de superficies.

5) Geodésicas.

Distancia en la superficie. Ecuación diferencial de las geodésicas. Axiomas de plano euclídeo según Hilbert. Superficies de revolución de curvatura constante y modelos de geometrías no-euclidianas. Triángulos geodésicos y el teorema de Gauss-Bonnet (demostración parcial).

6) Curvas algebraicas.

Curvas algebraicas en el plano afín K^2 . Puntos singulares, multiplicidad, cono tangente. Multiplicidad de intersección. Curvas algebraicas en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2(K)$. Coordenadas homogéneas y coordenadas afines. Homogeneización y deshogeneización. Teorema de Bezout. Puntos de inflexión y el Hessiano. Curva dual. Clasificación de cuatro puntos, razón doble, invariante j . Cúbicas: clasificación, forma de Weierstrass, estructura de grupo, parametrización mediante funciones elípticas.

7) Introducción a la geometría axiomática.

Definición axiomática de plano afín y de plano proyectivo. Propiedades de Pappus y de Desargues, caracterización de $\mathbb{P}^2(K)$.

BIBLIOGRAFIA

- Alekseevskij, Vinogradov and Lychagin. Basic ideas and concepts of differential geometry, Encyclopedia of Mathematical Sciences (Geometry I), Springer.
- Artin. Geometric Algebra, Wiley.
- Brieskorn-Knorrer. Plane algebraic curves, Birkhauser.
- Cukierman. Cuádricas y cúbicas. <http://mate.dm.uba.ar/~fcukier/>
- Do Carmo. Differential geometry of curves and surfaces, Prentice Hall. (*)
- Fulton. Algebraic Curves, Springer. (*)
- Gray. Modern differential geometry of curves and surfaces, Springer.
- Harris. Algebraic Geometry, Springer.
- Hartshorne. Foundations of Projective Geometry, Benjamin.
- Hilbert-Cohn Vossen. Geometry and the imagination, Chelsea (AMS).
- Klingenberg. Curso de geometría diferencial, Springer.
- Prasolov-Tikhomirov, Geometry. American Mathematical Society.
- Santaló. Geometrías no euclidianas, EUDEBA.
- Santaló. Geometría Proyectiva, EUDEBA.
- Spivak. Calculus on Manifolds (Cálculo en Variedades, Reverte).
- Spivak. A comprehensive introduction to differential geometry, 5 vols. Publish or Perish.
- Struik. Lectures on classical differential geometry, Dover.
- Stoker. Differential geometry, Wiley.
- Walker. Algebraic Curves, Springer.

(*) Referencias principales para el curso.